BIBLIOTECA NAZ.
Vittorio Emanuele III
XX XIV
B
29
NAPOLI

Digitized by Google

Digitized by Google

XXXIV
B
29

Digitized by Google

Digitized by Google

ELEMENTA GEOMETRIÆ PLANÆ AC SOLIDÆ.

Quibus accedunt ſelecta

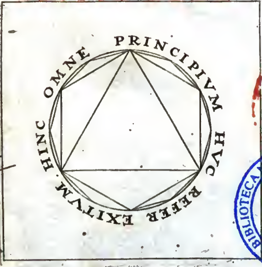
EX ARCHIMEDE THEOREMATA.

Auctore

ANDREA TACQUET

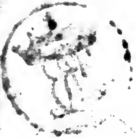
Soc. JESU Sacerdote & Matheſeos Profeſſore.

EDITIO NOVA.



AMSTELÆDAMI,
Apud HENRICUM WETSTENIUM.
cIↄ Iↄ c LXXXIII.

BIBLIOTECA NAZIONALE VITT. EMANUELE III NAPOLI



AMICE LECTOR.

CUm multis jam annis Elementorum Geometricorum, minoris formæ, in hiſce locis penuriâ laboratum eſſet, viſum denique eſt ad uſum ſtudioſæ juventutis, cujus gratiâ hunc laborem qualemcunque ſuſcepi, novam editionem adornare; in qua quid præſtitum ſit, paucis accipe.

1. Inprimis Geometriæ planæ ac ſolidæ elementa conjunxi, ne (ut fit plerunque) ſemper in planis tyrones hæreant; ſed ab his tranſeant ad ſolidâ; quorum ſummè neceſſaria cognitio eſt.

2. Propoſitionum hypotheſibus & aſſertionibus litteras, parentheſi incluſas, quibus ad figuram referri poſſint, appoſui: quod eo conſilio feci, ne ante demonſtrationem, iterum explicanda aſſertio, adeoque idem bis repetendum eſſet: & tamen litteris à reliquo ſenſu parentheſi ſeparatis, ſua aſſertioni univerſalitas conſtaret. Aſſertionem igitur conveniet legere primum litteris prætermiſſis; tum ſi non intelligas, te litteræ ad figuram ducent.

3. Propoſitiones aliquas prætermiſi, quarum ferè vel nullus uſus eſt, aut certè non alius, quam ut per eas demonſtrentur aliæ, quas ſine illis faciliori viâ poteram demonſtrare. Eoſdem tamen propoſitionum re-

tineo numeros, quos Euclides, ordinemque ſervo quem bis mille annorum uſus probavit.

4. Demonſtrationes vel novas affero, vel antiquas breviores plerumque ac faciliores conor efficere. Et prolixitas quidem raro prodeſt. Ea ſiquidem tardiores & hebetiores non juvat, ſubtilibus autem & ingenioſis moleſta eſt.

5. Quamvis autem brevis eſſe ſtuduero, exiſtimavi tamen, me à propoſito non recedere; ſi ea adderem, quæ Geometriam diſcere volentibus futura uſui videbantur. Itaque Corollaria & ſcholia adjunxi non pauca, quæ uſu longo didici in elementis deſiderari. Geometriæ practicæ fontes indico ſuis locis. Tum ſi quid illuſtre ad rem occurreret, non omiſi. Varia deinde in quibus laboratum hucuſque fuit, vel explicare vel demonſtrare conatus ſum.

6. In libro primo parallelarum theoria demonſtratur independenter ab undecimo axiomate, quod non axioma, ſed theorema eſt, & quidem non niſi difficulter ac longo circuitu demonſtrabile.

7. Secundum librum, in quo laborare multum tyrones ſolent, diſpoſui ad eum fere modum, quo jam analyſtæ ſcribunt æquationes ſuas. Quem ſi exactè tenere voluiſſem, fuiſſet quidem res brevior; ſed minus, ut arbitror, tyronibus accommodata.

8. In

8. In libro tertio ad prop. 16. paradoxa anguli contactus, quæ hactenus torsêre omnes, ſolvuntur.

9. In quinto libro proportionum doctrinam, ut quidem ab Euclide traditur ſatis ſpinoſam, efficere planiorem conatus ſum. Itaque primum proportionum elementa, faciliori quadam methodo, multiplicibus ablegatis, traduntur. Deinde hujus libri ſextam definitionem, quâ proportionum æqualitas per multiplices explicatur oſtendi non definitionem eſſe, ſed theorema, & quidem difficile & perobſcurum, cujus etiam demonſtrationem exhibemus, hactenus à nullo datam. Atque ita demonſtrationes Euclidæas quæ hinc ducuntur omnes, ſi quis fortè illas præ noſtris probationibus deſideret, ſtabilivimus. Tum aliud quoddam æqualium proportionum aſſigno ac demonſtro indicium univerſale, primum, facillimum, ex quo omnes quinti libri propoſitiones demonſtrare potuiſſem ſi hoc conducere diſcentibus judicaſſem. Poſtremò de proportionibus non pauca ſcitu neceſſaria ſubjungo, ac inprimis demonſtro axioma illud percelebre ſeu potiùs theorema: proportionem extremorum ex quotlibet intermediorum proportionibus componi, id quod hactenus in Geometriâ fuit deſideratum.

10. Librum duodecimum, cujus dif-

 ficiles

ficiles ac prolixæ demonſtrationes diſcentibus terrori eſſe ſolent, aliâ viâ plus quam decies breviori demonſtravi. Quod ita ſe habere, qui hæc noſtra cum Euclide ejuſque commentatoribus contulerit, deprehendet.

11. In libris quarto, ſexto, undecimo præſtantur ea quæ univerſim ſupra indicavimus.

12. Denique ſelecta ex Archimede theoremata aliâ ſimiliter ac breviori viâ demonſtrata adjunxi; eximiamque illius de cylindro ac ſphæra doctrinam poſtremis tredecim propoſitionibus adjectis, ampliavi, quibus inter cætera demonſtro ſeſquialteram proportionem ab eo in cylindro ſphæraque repertam, ab æquilatero cono eidem ſphæræ circumſcripto, tam in ſoliditate, quàm in ſuperficie continuari. Euclidi porro Archimedæa illa ſubnexui; non quaſi adhuc elementa, ſed quia ſubtilitate pariter atque uſu eximia ſunt: tum deinde ut Geometriæ candidatus intelligat, cum maximi Geometræ inventa admiranda aſſequi ſeſe viderit, nihil in Matheſi futurum tam ſubtile vel arduum, quod his inſtructus elementis percipere non poſſit.

Tu hæc habe; &, ſi placuerint, lege ac diſce: inventurus in his principia nobiliſſimæ & fortè omnium antiquiſſimæ ſcientiæ; quod oſtendet tibi, quam ſubnecto

HISTO-

HISTORICA NARRATIO
De ortu & progreſſu Matheſeos.

MAthematum elementa tradituro, viſum eſt de illorum origine ac præſtantia præfari quædam, ut intelligant Matheſeos candidati, cujuſmodi ea ſcientia ſit, cui ſe conſecraturi ſunt; & planum fiat adverſus eos, qui, quæ ignorant, contemnunt, quantæ dignitatis ſint hæ diſciplinæ, quas omnium ætatum ſapientiſſimi viri incredibili ſtudio ſibi putaverint comparandas. Uſui porro mihi fuit, in hac relatione concinnanda Petri Rami diligentia, qui ſcholarum toto primo libro benè magno Mathematicam Hiſtoriam ex Proclo, Laertio, Vitruvio, Gellio, Polybio, Tzetze, aliiſque accuratè copioſeque conſcripſit.

Prima hominum ſcientia Matheſis fuit ſi Joſepho credimus. Is lib. 1 cap. 3. ſcribit Sethi nepotes Cælorum ordinem ac ſiderum curſus obſervaſſe. Ne autem hæc inventa ex hominum notitia dilaberentur, cum Adamus univerſalem mundi interitum fore prædixiſſet, unum diluvio, incendio alterum, excitarunt duas columnas, alteram lateritiam, alteram lapideam: & utrique ſua inventa inſcripſerunt, ut ſi lateritiam diluvio deleri contingeret, lapidea ſuperſtes, hominibus diſcendi copiam faceret, & quæ inſcripta continebat, ſpectanda exhiberet. Ajunt enim lapideam illam ab ipſis dedicatam: quæ & noſtris temporibus extat in Syria. Hæc ille, penes quem fides eſto.

Poſt diluvium primos mortalium Aſſyrios & Chaldæos Mathemata coluiſſe tradunt idem

Joſephus, Plinius, Diodorus, Cicero. Sed ortæ & florentes apud Chaldæos Mathematicæ artes, deinde ex Chaldæa & Aſſyria ad Ægyptios tranſlatæ ſunt Auctore Abrahamo. Is enim cum Deo jubente ex patrio ſolo in Palæſtinam, ac deinde in Ægyptum profectus eſſet, cerneretque Ægytios artium bonarum capi ſtudio, atque indole ad diſcendum egregiâ eſſe, ut apud eundem Joſephum eſt lib. 1. cap. 9. Arithmeticam illis Aſtronomiamque quam præcedere Geometriam neceſſe fuit, communicavit. Quibus deinde ſtudijs adeò Ægyptij floruere, ut Ariſtoteles 1. Metaph. cap. 1. affirmet Mathematicas artes primum in Ægypto à ſacerdotibus publicâ vacatione fretis inventas eſſe.

Exinde Matheſis ex Ægypto mare trajiciens ad Græciæ Philoſophos pervenit: Thales enim Mileſius, qui ante Chriſtum floruit annis 584. primus Græcorum cum in Ægyptum veniſſet, Geometriam inde in Græciam tranſtulit. Is ſanè, præter alia, primi libri propoſitiones, 5, 15, 26. invenit. Eidem debentur 2, 3, 4, 5, l. 4. cujus inventi lætitiâ elatus bovem immolaſſe dicitur. Idem Æquinoctia & ſolſtitia obſervare cœpit Laertio teſte; & ſolis eclipſim, ut ſcribunt Hippias & Ariſtoteles, primus prædixit; & Tzetzes Auctor etiam eclipſim lunæ Regi Cyro prænunciaſſe. Quapropter hîc primus in Græcia Mathematicæ ſcientiæ parens atque Auctor fuit.

Poſt hunc Pythagoras Samius ille philoſophorum antiquiſſimus, Mathematicas diſciplinas vehementer auxit ornavitque. Et Arithmeticam quidem ita coluit, ut omnis propè illi ratio philoſophandi ex numeris duceretur. Geometriam verò, ut refert Laer-

tius

tius à materia abſtraxit primus: in qua mentis elatione invenit 32, 44, 47, 48, lib. 1. Sed inprimis ob inventas 32. & 47. lib. 1. celebratur, & hujus quidem inventionis lætitiâ tantâ affectus eſt, ut teſte Apollodoro apud Laertium, hecatombem immolarit. Idem incommenſurabiles magnitudines, & regularia quinque corpora primus aperuit. Idem Aſtrologiam & Muſicam impensè & docuit & exercuit. Neque ſolùm acutè & ſubtiliter multa invenit, ſed etiam, ludum primus aperuit, in quo juventus tam honeſtas, tamque nobiles artes addiſceret.

Pythagoram Anaxagoras Clazomenius & Oenopides Chius ſecuti ſunt, quorum meminit Plato in amatoribus, ubi adoleſcentes de Anaxagora & Oenopide in circulorum deſcriptionibus concertantes inducit. Ab Anaxagora Geometriam quandam ſcriptam indicat Ariſtoteles, & ex Laertio accepimus oſtenſum ab eo ſolem Peloponneſo majorem (nota Aſtronomiæ incunabula,) eundemque, de habitationibus in lunâ nonnulla diſputaſſe. Oenopidi adſcribit Proclus 12. & 23, l. 1. Hos excepêre Briſo, Antipho, & Chius Hippocrates, omnes, tentatâ circuli quadraturâ, ab Ariſtotele reprehenſi pariter & celebrati. Sed hos inter longè clariſſimus Hippocrates fuit, ille è mercatore Philoſophus & Geometra, qui præter circuli quadraturam, etiam cubi duplicationem primus tentavit per duas medias proportionales, quam viam, ut ſingularem & unicam omnis poſteritas amplexa eſt. Illius etiam illa propria & magna laus eſt, quod Proclo teſte, elementa primus ſcripſerit, & ab aliis inventa ordinaverit.

Democritus non in Philoſophia ſolum, ſed etiam in Matheſi admirabilis fuit; ejus tum phyſica, tum fortè etiam Mathematica monumenta perierunt invidiâ, (ut quidam ferunt) Ariſtotelis, ſua unius ſcripta cupientis legi. Democriti Philoſophiam, Petrus Gaſſendus eruditiſſimo opere nuper edito inſtauravit. Theodorus Cyreneus, licet ejus inventa Mathematica non extent, vel eo nomine magnus eſt, quod Platonis Magiſter fuiſſe memoretur.

Ad Platonem igitur aliquando pervenimus, quo nemo alius ſplendorem majorem attulit Mathematicis diſciplinis. Ille Geometriam maximis acceſſionibus amplificavit, ſtudio incredibili in eam collocato. Et inprimis reperta eſt ab eo Analyſis, certiſſima inveniendi & ratiocinandi via. Philoſophiæ ſuæ libros Mathematicis rationibus diſtinxit, ac quidquid in Mathematicis admirabile conjunctum cum Philoſophia eſſet, excitavit. Academiæ foribus inſcriptum legebatur: *οὐδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω; nullus Geometriæ expers accedito*: illuſtri ſanè argumento quam non aliena ſed propria, quamque non inutilis, vel indecora, ſed honeſta & commoda Matheſis, ſanæ certæque Philoſophiæ ſit. Quantus certè Plato Matheſeos fuerit & admirator & cultor, is demum intelliget, qui ejus monimenta perlegerit.

Ex Platonis Academia propè innumeri deinceps Mathematici prodierunt. Tredecim Platonis familiares à Proclo commemorantur, quorum ſtudiis Mathematica fit abſoluta. Hinc Leodamas Thaſius, Archytas Tarentinus, Theætetus Athenienſis; à quibus Mathemata egregiè ſunt amplificata. Leodamas Analyſim à Platone acceptam exercuit, ejuſque ope in-

inveniſſe multa à Laertio dicitur. Theætetum tum inventa ſua, inter quæ Elementa ab eo ſcripta & regularium corporum inſcriptio celebrantur, illuſtrem faciunt, tum Platonis encomia, qui etiam illius nomini dialogum inſcripſit. Archytas Elementa ſcripſit etiam ipſe, ejuſque duplicatio cubi apud Eutocium legitur, cujus etiam illa ſingularis fuit laus, quod Mathematicam ad humanos uſus traduxerit ferè primus; unde & lignea columba ab eo facta volaſſe legitur apud Gellium. Quem ſecuti Dædalus, aliique artifices fabulis poëtarum materiam præbuere. Archytas porro & Mathematicus fuit & exercitus Imperator, qui nimirum in patriis bellis copiis civium ſuorum quinquies præfuit & quinquies vicit. Neoclidis tantum nomen celebratur, Leonte fortaſſis diſcipulo illuſtrior quam inventis ſuis. Leon ſanè Mathematicæ univerſæ elementa conſcripſit, auxit & ad uſum aptiora fecit. Quare inter præcipuos elementorum conditores ſuo merito cenſeri debet.

Eudaxus Gnidius ſuperiorum æqualis in Arithmeticis magnus & (ſi Scholiaſtæ Græco credimus) totum ei Quintum librum debemus. Elementa item conſcripſit, & generaliora effecit, & ſectiones à Platone inchoatas auxit; inſuper aſtronomicarum hypotheſium primus fabricator extitit, & Geometriæ fontes, ut ſupra Archytas, ad organicam ac mechanicam derivavit. Amyclas Heracleotes & Menechmus, ejuſque frater Dinoſtratus, Helicon Cyzicenus, Theudius, Hermotimus Colophonius, Philippus Mendæus, omnes Platonici, Geometriam multò perfectiorem reddiderunt. Et Menechmus quidem ſectiones

coni-

Theudius & Hermotimus elementa fecerunt univerſaliora & auctiora. Atque hi omnes ex Platonis Academia, Mathematicam Philoſophiam ad perfectionem adduxerunt, ait Proclus. Sed & Xenocrates Platonis auditor, & Ariſtotelis magiſter, ipſeque Ariſtoteles cognitione Mathematum clari fuêre. Illius cum auditor quidam eſſe vellet Geometriæ imperitus, abi, inquit, anſas enim Philoſophiæ non habes.

De *Ariſtotele* verò quid dicam, libri illius omnes locis Mathematicis ſunt referti, ex quibus in unum collectis librum confecit Blancanus. Ex Ariſtotelis ſchola duo præcipuè celebrantur Eudemus & Theophraſtus. Hic ſcripſit de numeris libros duos, de Geometria quatuor, de lineis individuis unum; ille hiſtoriam Mathematicam condidit, ex quo Proclus aliique ſua mutuati ſunt. Aryſteo, Iſidoro, Hypſicli Geometris ſubtiliſſimis ſolidorum libros maximè debemus. Denique Euclides aliorum inventa collegit, ordinavit, auxit, demonſtravitque accuratiùs, eaque nobis reliquit elementa, quibus jam ubique terrarum ad Mathematicam juventus inſtituitur. Obiit anno ante Chriſtum 284. Euclidem ſecuti ſunt centum ferè poſt annis Eratoſthenes & Archimedes. Eratoſthenis clarum inprimis nomen fuit, ſed ejus ſcripta periêre. Archimedis habemus multa, multa amiſimus.

Sed Archimedem cum nomino, apicem quendam humanæ ſubtilitatis, totiuſque Mathematicæ diſciplinæ abſolutionem animo concipio. Ejus inventa admiranda prodidêre Polybius, Plutarchus, Tzetzes, aliique. Archimedi coævus fuit Conon Geometra & Aſtro-

ſtronomus, cujus mortem Archimedes deflet in lib. de quad. parab. Archimedem & Cononem intervallo non magno ſequitur Apollonius Pergæus, alter Geometriæ princeps, qui egregiæ laudis encomio magnus Geometra fuit appellatus. Illius extant quatuor Conicorum ſubtiliſſimi libri. Eidem adſcribuntur Euclidis libri 14 & 15, ab Hypſicle contracti. Hipparchus & Menelaus, de ſubtenſis in circulo hic 6, ille 12 libros primi conſcripſêre, pro quo invento tam utili & neceſſario non parva utrique laus & gratia debetur. Extant etiam Menelai de triangulis ſphæricis libri tres. Theodoſii Tripolitæ utiliſſimi ſphæricorum libri tres in omnium manibus verſantur. Atque hi quidem, ſi Menelaum excipias, ante Chriſtum vixêre omnes.

Anno poſt Chriſtum 70 venit in lucem Claudius Ptolemæus, Aſtronomorum princeps, vir planè mirabilis, ſupraque (inquit Plinius) naturam mortalium. Is verò non Aſtronomiæ tantùm, ſed etiam Geometriæ periti ſſimus fuit; quod teſtantur, tum alia multa ab eo ſcripta, tum in primis libri de ſubtenſis, Menelai quidem 6, Hipparchi verò 12, ab illo ad 5 theoremata contracti. Plutarchi etiam nominatiſſimi Philoſophi extant Mathematica problemata. Jam Eutocij Aſcalonitæ erudita in Archimedem commentaria quis ignorat? Ab eo Philonis, Dioclis, Nicomedis, Spori, Heronis, tanquam excellentium in Mathematicis Magiſtrorum inventa de duplicando cubo recenſentur; Et Heronis quidem tam in mechanicis, quam in Geometricis excellens ingenium

genium fuit. Cubi certe duplicatio ab eo tradita a Pappo l. 3. p. 7. laudatur præ omnibus. Cteſibii Alexandrini, cui antlias debemus noſtras, admiranda opera à Virtuvio, Proclo, Plinio, Athenæo celebrantur. Gemini quoque non minimum inter Mathematicos nomen eſt, quem Euclidi ipſi Proclus in quibuſdam præpoſuit.

Diophantus, & ipſe Alexandrinus, in Arithmetica tantus fuit, quantus in Geometria Archimedes, Apollonius, Euclides, verè totius numericæ ſubtilitatis magiſter; à quo reperta ſit admirabilis illa ars, quam Algebram dicimus; quæ hiſce temporibus à Franciſco Vieta, & Renato Carteſio multò perfectior & univerſalior effecta eſt. Reliqui inter veteres celebrantur Nicomachus Arithmeticis, Geometricis, Muſicis clarus monimentis, Serenus binis de cylindri ſectione libris Geometris notiſſimus, Proclus, Pappus, Theon. Quantus Mathematicus fuerit Proclus ex doctiſſimis ejus in Euclidem commentariis, aliiſque ſcriptis manifeſtum eſt. Atque hic opinor ille eſt, qui, ut refert Zonaras, & ex eo Ramus, ac Baronius, ſub annum Chriſti 514, Vitaliani claſſem Conſtantinopolim obſidentis, optico ſpeculorum artificio combuſſit. Theonis laudes verè magnus mirabiliter exaggerat Petrus Ramus, ut etiam libros, quos Euclidi hactenus adſcripsêre omnes, Theoni putet attribuendos. Sed iniquior ubique in Euclidem Ramus, neque ullo ſolido nixus fundamento, hic audiendus non erit. Ut finis aliquando ſit, agmen Pappus claudat tempore inter veteres poſtremus, ut qui vixerit circa annum 400, ſed nominis claritudine, omnique laude Mathema-

tum

tum primis adnumerandus. Quæ ante Hypſiclem, Cteſibium, & Diophantum protulerat fœcunda ingeniorum parens Alexandria, hunc quoque ingenti bono Matheſeos dedit. Scripſit collectionum Mathematicarum libros ſeptem, è quibus duo primi perierunt. Reliqui quinque tam multis abundant, tamque variis, ex omni propè genere Mathematum nobiliſſimis inventis, ut inter prima quæ extant veterum monimenta, ab omnibus cenſeantur.

Habetis originis ac progreſſionis Mathematicæ hiſtoriam brevem. Ex qua Matheſeos antiquitas, præſtantia, ac dignitas apparet. Sanè Reip. litterariæ principes, iidem qui Philoſophiam, etiam Mathematicam genuêre, gemellas ſorores partu velut uno, quas qui diſtrahere ab invicem violentè velit, næ ille in nativam illarum concordiam, cum inſigni injuria crudelis ſit; quando, quod fieri in gemellis ſolet, uno vel loco vel morte ſublato, languêre, quin & contabeſcere alterum neceſſe ſit.

APPROBATIO CENSORIS.

Elementa Geometriæ R. P. Andreæ Tacquet Societ. JESU, *ad inſtructionem illorum, qui ſcientiam illam ſectantur, utiliter imprimentur. Actum 9. Aprilis 1654.*

Guillielmus Bolognino
S. Th. L. Canon. & Lib.
Cenſor Antv.

FA-

FACULTAS
R. P. PROVINCIALIS.

E*Go infraſcriptus Societatis* JESU *per Flandro-Belgicam Præpoſitus Provincialis, poteſtate mihi factâ ab admodum R. P. N. Goſuwino Nickel Præpoſito Generali eiuſdem Societatis, facultatem concedo, ut Elementa Geometriæ planæ ac ſolidæ, demonſtratæ brevi ac facili methodo, & tyronum captui magis accomodatâ, unà cum ſelectis ex Archimede Theorematis, aliiſque novis demonſtrationibus, Auctore* P. ANDREA TACQUET: *omnia ab aliquot Societatis noſtræ Mathematicis approbata, typis mandentur: in quorum fidem has manu noſtra ſubſcriptas, & ſolito officii ſigillo munitas dedimus. Antverpiæ* 18. *Martii* 1654.

JOANNES BAPTISTA
ENGELGRAVE.

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ

LIBER PRIMUS.

SCientiæ proprium munus eſt, ex notionibus quibuſdam ſimpliciſſimis, rationali naturæ à conditore Deo impreſſis, elicere aliquid, quod prius ignorabatur, atque inde rurſum aliud ex alio; ut prior cognitio ſemper ad ulteriorem ſit gradus. Quæ ratio ſi accuratè teneatur, ex minimis, & per ſe notis ad rerum abditiſſimarum cognitionem pertingemus. Hanc methodum, rationemque ſcientiæ, præ omnibus amplexæ ſunt eæ diſciplinæ, quæ in quantitatis contemplatione verſantur. Quo fructu id factum ſit ſciunt omnes, qui hiſce ſtudiis imbuti ſunt. Et ſanè Geometria (ut de aliis Matheſeos partibus jam nihil dicam) mirum eſt, quam brevi ex apertiſſimis ad obſcuriſſima trahat, & ex humillimis ad altiſſima ſtatim aſſurgat. Statuuntur primò ſimpliciſſima quædam facillimaque principia, quibus nemo ratione præditus diſſentire poſſit. Deinde nihil aſſeritur, vel admittitur, quod ex iis infallibili ratiocinio non ſit de-

 ductum;

ductum. Atque ita demum admiranda theoremata, ab omni humano ſenſu & cognitione remota, incredibili certitudine ac evidentiâ innoteſcunt.

Principiorum genera ex quibus Geometria omnis derivatur, ſunt tria, Definitiones, Poſtulata, Axiomata.

DEFINITIONES.

1. PUnctum eſt ſignum in magnitudine individuum.

Hoc eſt, quod dividi ne cogitatione quidem poſſit. Punctum omnis magnitudinis quaſi principium eſt, ſicut unitas numeri.

2. Linea eſt magnitudo tantùm longa.

Nimirum carens omni latitudine. Intelligitur generari ex fluxu puncti.

3. Lineæ termini ſunt puncta.

Fig. 1. tabulâ 1, 4. Recta linea eſt, quæ ex æquo ſuis terminis interjicitur.

Vel ut Archimedes: Recta linea eſt minima linearum eoſdem terminos habentium; ſive eſt omnium breviſſima, quæ inter duo puncta duci poſſunt.

Vel ut Plato: Recta linea eſt, cuius extrema obumbrant omnia media.

Unus omnium ſenſus eſt: Inſtrumentum quo rectæ lineæ deſcribuntur, regula eſt: quæ utrum recta ſit, hoc examine licebit cognoſcere.

Juxta regulam deſcribatur linea, tum regulam inverſam,

inverſam, ſic ut extremitas priùs dextra, jam ſit ſiniſtra, rurſum applica lineæ priùs deſcriptæ, ſi planè cum illa congruat, recta eſt regula; ſi non congruat, non erit recta. Ratio pendet ex axiomate 13.

5. Superficies eſt magnitudo tantùm longa & lata.

Duas ergo habet dimenſiones. Intelligitur generari ex fluxu lineæ.

6. Superficiei extrema ſunt lineæ.

7. Planum, ſive ſuperficies plana eſt, quæ ex æquo inter ſuas extremas lineas jacet.

Vel ut Hero: ſuperficies plana eſt, cujus omnibus partibus recta linea accommodari poteſt.

Generatur enim ſuperficies plana ex fluxu lineæ rectæ.

Vel: plana ſuperficies eſt, cujus extrema obumbrant omnia media.

Vel: plana ſuperficies eſt minima omnium eoſdem terminos habentium. *Idem ſenſus eſt omnium.*

Non definivit hic corpus ſive ſolidum Euclides, quia nondum hic erat acturus de corpore. Ne quis tamen illius definitionem deſideret; corpus eſt magnitudo longa, lata, & profunda. Tres igitur dimenſiones habet corpus, ſuperficies duas, linea unam, punctum nullam.

8. Angulus planus eſt duarum linearum,

in plano ſe mutuo tangentium, & non in directum jacentium, alterius ad alteram inclinatio.

Fig. 2. 4. *Angulum igitur efficiunt duæ lineæ B A, C A ſe mutuo tangentes in A, ſic ut non exiſtant ſibi mutuo in directum; hoc eſt; non efficiant unam lineam.*

9. Latera ſeu crura anguli, ſunt lineæ, quæ angulum efficiunt.

10. Vertex anguli eſt punctum (A) in quo crura ſibi mutuo occurrunt.

Fig. 2. 4. *Cum angulus eſt unicus, unâ litterâ ad verticem poſitâ deſignatur. Cum plures ad unum punctum exiſtunt, deſignantur tribus literis, quarum media denotat verticem anguli; vel etiam ſubinde unicâ lateribus propè verticem interpoſitâ. Sic in figura 5. angulus qui fit à lineis B A, C A deſignatur vel literis tribus B A C, vel unicâ O.*

Fig 5. 11. Anguli æquales, vel potiùs ſimiles dicuntur; ſi, cum ſibi invicem vertices im-

Fig. 2. 3. ponuntur, latera unius congruant lateribus alterius. *Ad hoc non requiritur, ut latera ſint æquè longa.*

12. Inæquales, ſeu diſſimiles dicuntur anguli, cum vertice & uno latere congruentibus, alterum non congruit: & ille major dicitur, cujus latus cadit extra. *Sic angulus B A E major eſt angulo B A C.*

Fig 5. *Angulus non minuitur, vel augetur, licet crura minuas vel augeas.*

Porro

Porro quia anguli natura in linearum inclinatione conſiſtit, inclinatio autem linearum quantitas non eſt, neque angulus ullus quantitas erit. Et ſanè eodem jure curvitas eſſet quantitas, quo angulus, cum ab invicem non magis differant, quam inflexio & infractio. Quando igitur cum Euclide, aliiſque geometris angulos æquales eſſe dicimus, nihil aliud, quam inclinationum ſimilitudo, hoc eſt, laterum congruentia indicabitur. Vide quæ de hac re plenius dicturi ſumus poſt propoſitionem 16. l.3.

13. Angulus rectilineus eſt, quem rectæ lineæ efficiunt; curvilineus, quem curvæ; mixtus, quem recta & curva. *Fig. 2. 4.*

14. Cum recta (CA) ſuper rectam (BF) conſiſtens, in neutram inclinat partem, ac proinde angulos utrimque facit æquales (C A B) & C A F) rectus eſt uterque æqualium angulorum: Recta autem (C A) alteri inſiſtens dicitur perpendicularis, ſeu perpendiculum. *Fig. 6.*

Angulus rectus ſic etiam definiri poteſt. *Fig. 6.*

Rectus angulus is eſt (B A C) cui a parte altera æqualis oritur (C A F,) ſi unum latus (B A) produxeris.

Duæ regulæ ſic compactæ ut angulum rectum contineant, inſtrumentum efficiunt, quod norma appellatur. Illius inventorem Vitruvius c.2.l.9. affirmat Pythagoram. Tanta vero anguli recti vis eſt in rebus omnibus conſtruendis, dimetiendis formandis & firmandis, ut nihil ferè effici ſine illo poſſit. Nor-

mæ Examen ſic inſtituitur. Eius latus A E applica rectæ lineæ A F, & juxta latus alterum deſcribatur recta C A. Converſa deinde norma verſus B, ſi utroque ſuo latere congruat rectis C A, A B, ſcito eſſe legitimam & exactam. Ratio patet ex ipſa def. 14.

Fig. 7. 15. Obtuſus angulus eſt (B A C,) qui recto (F A C) major eſt.

Fig. 8. 16. Acutus angulus eſt (L A I) qui recto (F A I) minor eſt.

17. Figura plana, eſt ſuperficies plana, unâ vel pluribus lineis undiq; terminata.

Fig. 9. 18. Circulus eſt plana ſuper ficies, unius lineæ circuitu comprehenſa, quæ circumferentia dicitur, à qua ad aliquod punctum intra contentum (A) omnes, quæ duci poſſunt rectæ lineæ, ſunt æquales.

19. Hoc vero punctum centrum appellatur.

Fig. 9. 20. Diameter circuli eſt recta per centrum ducta, (B C,) ad circumferentiam utrimque terminata, & circulum bifariam dividens.

Fig. 9. 21. Semidiameter, ſive radius eſt recta (AF,) ex centro ad circumferentiam ducta.

Fig. 9. 22. Semicirculus eſt figura (B L C) comprehenſa à diametro (B C) & dimidia circumferentia (B L C.)

Fig. 9. *Circulus ita generatur: ſi recta linea (A B) uno extremo ſuo (A) manente fixo, in orbem circumagatur,*

tur, recta ipſa circulum, extremitas illius altera (B) circumferentiam producet. Porro mira circuli indoles vel in ipſo exortu ſuo apparet. Ad ejus namque geneeſim contraria concurrunt, motus & quies, dum linea movetur & ejus extremum quieſcit. Dein lineæ generanti puncta omnia, cum inæquales eodem tempore periodos abſolvant, diverſa celeritate moventur.

Tertio peripheria circulum ambiens, conſtat quodammodo ex contrariis, & extremis ſine medio; ex concavo nimirum & convexo, inter quæ rectum ita medium eſt, ut æquale inter magnum & parvum; idque eo mirabilius eſt, quod ea contraria inſint lineæ nullam latitudinem habenti. Hæc tria Ariſtoteli viſa ſunt admiranda, ex quo illa depromſimus. At prodigia circuli longè majora aperuimus in diſſertatione phyſico-Mathematica, quam una cum Cylindriis & angularibus in lucem emiſimus anno 1652 iſthic ea leget, qui volet.

Circumferentiam Mathematici partiri ſolent in 360. æquales partes (quas gradus vocant) ob multas illius numeri commoditates: ſemicircumferentiam in 180, quadrantem in 90.

23. Rectilinea figura eſt ſuperficies plana, rectis lineis undique terminata.

24. Triangulum, ſive trilaterum, eſt plana ſuperficies tribus rectis comprehenſa.

Hæc figurarum rectilinearum prima ac ſimpliciſſima eſt, in quam cetera omnes reſolvuntur.

25. Triangulum æquilaterum, eſt quod *Fig. 10.*

Fig. 11. 12. tria latera habet æqualia.

Fig. 13. 26, Triangulum Iſoſceles, ſeu æquicrure, quod duo tantùm latera habet æqualia.

Fig. 13. 27. Scalenum, quod tria latera inæqualia habet.

Fig. 12. 28. Rectanguium triangulum eſt, quod

Fig. 10. 11. unum angulum habet rectum.

29. Obtuſangulum triangulum eſt, quod

Fig. 14. 15. unum angulum habet obtuſum.

30. Acutangulum triangulum eſt, quod tres habet acutos angulos.

Fig. 15. 31. Inter figuras quadrilateras, rectangulum eſt, qu d quatuor angulos habet rectos, adeoque æquales: *ſive latera æqua-*

Fig. 16. *lia ſint, ſive non.*

32. Quadratum eſt, quod æquilate-

Fig. 17. rum, & rectangulum eſt, *ac proinde æquiangulum.*

Omne quadratum eſt rectangulum, ſed

Fig. 14. 15. 16. 17. *non contra.*

33. Rhombus eſt, qui æquilaterus, ſed non æquiangulus eſt.

34. Rhomboides, quæ adverſa latera & angulos habens æqualia, neque æquilatera, neque æquiangula eſt.

35. Parallelogrammum eſt figura quadrilatera, cujus bina oppoſita latera (AB, FC, & BF, AC) ſunt parallela. Quid vero ſint parallelæ, dicetur ſeq. defin.

Omne

Omne rectangulum, & quadratum eſt parallelogrammum; ut ſuo loco demonſtrabitur. Sed non contra.

36. Rectæ lineæ parallelæ ſeu æquidiſtantes ſunt, quæ in eodem plano exiſtentes, utrimque in infinitum protractæ, æqualibus ſemper intervallis inter ſe diſtant. Fig. 18.

Æqualia intervalla deſumuntur penes perpendiculares. Quare ſi omnes ad unam ex duabus, parallelam A B, perpendiculares Q L æquales fuerint, dicentur rectæ A B, C F parallelæ.

Generantur parallelæ, ſi recta L Q ad rectam A B perpendicularis, per A B ſemper perpendiculariter moveatur, tunc enim ejus extremum L. deſcribit parallelam C F.

Euclides definit parallelas eſſe, quæ utrimque in infinitum productæ, in neutram partem coincidunt. Verum quia dantur lineæ quæ ſimul infinitum productæ licet ad ſe mutuo appropinquent ad intervallum quovis dato minus, ac proinde, licet non ſint parallelæ, nunquam tamen concurrant, (cujuſmodi ſunt hyperbola & recta linea; conchois & linea recta; item duæ æquales parabolæ circa eundem axem deſcriptæ, & plures aliæ;) Non videtur per ſe notum eſſe, duas rectas licet nunquam concurrant, fore ſemper æquali intervallo diſſitas, hoc eſt æquidiſtantes: poſſet enim quiſpiam objicere, fieri fortaſſis poſſe, ut etiam ipſæ, licet ad ſe mutuo ſemper appropinquarent, tamen nunquam concurrerent. Quare Euclidæa definitio paralleliſmi naturam non ſatis explicat.

37. Parallelogrammi & cujuſvis quadrilateri diameter eſt recta (A F) per angulos Fig. 17.

los oppoſitos ducta.

38. Figuræ planæ pluribus lateribus, quam quatuor comprehenſæ, multilateræ ſeu multangulæ, ſeu græca voce, polygonæ vocantur.

Fig. 19. 39. Rectilineæ figuræ externus angulus eſt, qui latere producto extra figuram oritur. *Tales ſunt F B C, G C A, H A B. Tot igitur figura quælibet habet externos angulos, quot latera & angulos internos.*

Poſtulata.

Poſtulatum eſt, quod facilè fieri poſſe per ſe ſit manifeſtum. Poſtuletur ergo, ut concedatur.

1. A quovis puncto ad quodvis punctum rectam lineam ducere.

2. Rectam lineam terminatam in directum & continuum protendere.

3. Quovis centro ad quodvis intervallum circulum deſcribere.

Axiomata.

Axioma eſt ſententia per ſe manifeſta.

1. Quæ eidem ſunt æqualia, & inter ſe æqualia ſunt. Et quod uno æqualium majus aut minus eſt, majus quoque aut minus eſt altero æqualium; & converſim.

2. Si

2. Si æqualibus addas æqualia, tota erunt æqualia.

3. Si ab æqualibus demas æqualia, quæ remanebunt, erunt æqualia.

4. Si inæqualibus addas æqualia, tota erunt inæqualia.

5. Si ab inæqualibus tollantur æqualia, quæ remanent, erunt ineæqualia.

6. Quæ ejuſdem dimidia ſunt, inter ſe ſunt æqualia: & quæ ejuſdem ſunt dupla, vel tripla, vel quadrupla, inter ſe æqualia ſunt.

7. Quæ mutuo ſibi congruunt, æqualia ſunt.

Non rectè Clavius hoc Axioma convertit. Falſum eſt enim, ea quæ univerſim inter ſe æqualia ſunt, ſibi mutuo congruere: Diſſimiles enim magnitudines poſſunt eſſe æquales, neque tamen congruent. Quòd ſi ſimiles & æquales fuerint, valebit converſa. Statuamus igitur axioma.

8. Si rectæ lineæ æquales fuerint, ſibi mutuo congruent: & anguli ſi æquales fuerint, ſibi mutuo congruent.

9. Totum ſua parte majus eſt.

10. Omnes anguli recti inter ſe æquales ſunt.

Euclidis axioma undecimum eſt: Si in duas rectas A B C F, incidens recta G I, angulos ad eandem partem interiores BLQ, FQL, fecerit duobus rectis minores, duæ illæ rectæ, Fig. 20.

ctæ ſi protrahantur, tandem concurrent ad illam partem, ad quam ſpectant anguli duobus rectis minores.

Hoc vero non eſt clarius illo, quod Prop. demum 29. Euclides ipſe demonſtrat: videlicet, ſi anguli B L Q, F Q L, fuerint duobus rectis æquales, rectæ A B, C F; nunquam concurrent.

Quare axioma illud è principiorum numero cum Gemino & Proclo, aliiſque Geometris rejecimus: eſt enim non axioma, ſed theorema, idque demonſtrabimus poſt Propoſitionem 31. hujus libri.

Ex defin. 36. *Ejus loco alia duo ſequentia ſubſtituo, quorum veritas ex definitione parallelismi ſtatim apparet. Eſto igitur axioma.*

11. Parallelæ lineæ communi perpendiculo utuntur.

Hoc eſt, recta, quæ ad parallelarum unam perpendicularis, eſt quoque perpendicularis ad alteram.

Fig. 21. 12. Perpendicula bina (L O, Q I) ex parallelis æquales utrimque intercipiunt partes (L I, O Q.)

13. Duæ rectæ lineæ ſpatium non comprehendunt.

Ad hoc ſiquidem opus eſt ad minimum tribus.

14. Duæ rectæ lineæ nequeunt habere ſegmentum commune: & omnes rectæ punctualiter ſe interſecant.

Fig. 22. *Recta A X occurrat rectæ Z D, ea ſi producatur non perget per D A, ſed in E, ſic ut rectam X B non niſi punctualiter interſecet. Axioma ex notione*

notione ipſa rectæ lineæ evidentiſſimum eſt. Tamen quia nonnulli tam ſubtiliter philoſophantur, ut credant rectas lineas, aliquâ ſui parte commiſceri poſſe, lubet in eorum gratiam hoc axioma ampliùs declarare,

Habeant, ſi fieri poteſt, duæ rectæ A X, A Z partem communem A D. Centro A deſcribatur circulus, ſecans rectas in B, & C, tum accipiatur arcus B F æqualis arcui B C, & intelligatur ducta eſſe recta F A.

Rectæ igitur C A & F A eundem prorſus ſitum habent reſpectu rectæ B A. Sed recta C A cum recta B A habere dicitur commune ſegmentum D A, ergo etiam recta F A habet cum B A commune ſegmentum D A.

Tres jam igitur rectæ C A, B A, F A commune D A ſegmentum habent.

Sumatur rurſum arcus F G æqualis prioribus B F, & C B, & intelligatur ducta eſſe recta G A. Rurſum liquet rectas B A, G A, eundem habere ſitum reſpectu rectæ F A. Sed jam oſtenſum eſt rectam B A habere cum recta F A commune ſegmentum D A. Ergo etiam recta G A, cum F A commune habet ſegmentum D A.

Jam ergo rectæ quatuor C A, B A, G A, F A commune D A ſegmentum habent. Eodem prorſus modo oſtendam ſi per totam circuli circumferentiam ſumantur arcus prioribus æquales, omnes ſimul circumquaque rectas lineas ductas ad A unum idemque habituras commune ſegmentum D A. Hoc tam immane abſurdum ſequitur ex eo, quod poterentur binæ rectæ C A, B A habere ſegmentum

com-

commune. Impoſſibile eſt igitur ut duæ rectæ ſegmentum commune habeant.

In hoc axiomate vis tota nititur illius celebrati in ſcholis argumenti, quo demonſtratur magnitudinem ex punctis omnino indiviſibilibus numero finitis componi non poſſe: & eſt ejuſmodi. Conſtent ſi fieri poteſt magnitudines ex punctis. Circa idem centrum deſcriptæ intelligantur quotcumque circumferentiæ circulares, & ponatur extima ſeu maxima componi ex centies mille punctis, a quibus ſingulis ad centrum commune ductæ intelligantur rectæ lineæ.

Ex axiomate jam explicato certum eſt rectas illas nuſquam commiſceri, niſi in centro ſolo. Quare dum omnes medias peripherias pertranſeunt, in iis æque multa deſignant puncta, ac erant in extima. Omnes igitur circumferentiæ concentricæ æquè multis punctis conſtant, ac proinde omnes inter ſe æquales erunt. Atque ita circumferentia, hæc in charta deſcripta æqualis probabitur circumferentiæ firmamenti. Aliis propè innumeris demonſtrationibus hìc error obruitur. Sed unam illam hoc loco attuli præ cæteris, quòd paſſim ſit decantata, & ex præſenti axiomate immediate pendeat.

Propoſitionum aliæ faciendum aliquid proponunt, & vocantur problemata; aliæ in ſola contemplatione ſiſtunt, quæ idcirco Theoremata inſcribuntur.

PRO-

PROPOSITIONES.

Citationes requiſitæ reperiuntur ad marginem. Cum citantur propoſitiones, primus numerus deſignat propoſitionem, littera (L) cum nnmero ſequenti librum denotat: ut ſi occurrat (per 5. l. 3) ita lege (per propoſitionem quintam libri tertii.) Figura quærenda ſemper eſt inter figuras ejus libri, in quo tum verſamur: citationes reliquæ facilè intelligentur.

Traduntur hoc libro affectiones, primæ triangulorum & parallelogrammorum. Propoſitiones illuſtriores ſunt 32. 35. 37. 41. 44. 45. 47.

PROPOSITIO PRIMA.

Super datâ rectâ (A B) triangulum æqüilaterum conſtituere. *Fig. 23.*

Centro A, intervallo A B *a* deſcribatur circulus F C B, & centro B, intervallo eodem B A deſcribatur circulus A C L, priorem ſecans in puncto C, ex quo ducantur rectæ C A, C B. a *Per poſtul.* 3.

Dico triangulum A C B factum eſſe æquilaterum. Nam recta A C eſt *b* æqualis rectæ A B, cum ſint ejuſdem circuli F C B ſemidiametri; & recta B C etiam æqualis eſt eidem rectæ B A, cum ambæ ſint ſemidiametri b *Per def.* 18.

diametri

c Per axio. 1. diametri circuli L C A. Ergo A C, B C *c* ſunt æquales inter ſe: ac proinde omnia d Per def. 26 latera trianguli ſunt æqualia. Ergo triangulum *d* ACB & æquilaterum eſt, & ſuper datâ rectâ AB conſtitutum, quod erat faciendum.

PROPOSITIO II.

Fig. 24. *AD datum punctum (A) datæ rectæ (E F) æqualem ponere.*

Accipe circino *a* intervallum E F, & a Poſtul. 3. transfer ex A in D, erit recta A D par datæ E F.

PROPOSITIO III.

Fig. 24. *DAtis duabus rectis inæqualibus, de majore (G H) minori (E F) parem auferre (G I)*

b Poſtul. 3. Accipe circino *b* intervallum minoris datæ E F, & transfer in majorem ex G in I.

PROPOSITIO IV.

Fig. 25. *SI duorum triangulorum (X Z) latus unum (B A) uni (F L) & alterum (C A) alteri (I L) ſit æquale, angulique (A & L) ab illis lateribus facti, etiam ſint æquales; æquabuntur etiam & baſes*

ſes (B C,F I) & tota triangula (X , Z) & reliqui ad baſim anguli (B F , & C, I) qui lateribus æqualibus opponuntur.

Nam ſi intelligamus triangulum Z triangulo X ſuperponi, latera L F, L I perfectè congruent *a* ſibi æqualibus lateribus A B, A C, ſic ut puncta tria L, F, I, cadant ſuper tria puncta A, B, C, ergo tum etiam baſis F I tota cadet ſupra totam baſim B C: Sed & anguli F, B, itemque I, C totaque triangula ſibi mutuo tunc congruent. Omnia igitur per 7. ax. æqualia ſunt. Quod erat demonſtrandum. a *Per axio* 8.

Scholium.

Similiſerè ratiocinio, theorema ſequens, cujus mox erit uſus, licebit demonſtrare. Fig. 25.

Si duorum triangulorum X, Z, latera B C, F I æqualia fuerint, & anguli illis lateribus adjacentes, nimirum B & C ipſis F, & I fuerint æquales, omnia reliqua, & triangula ipſa, æqualia erunt.

Quoniam enim anguli B & C æquantur angulis F, & I; ſi latus F I imponas lateri ſibi æquali B C, illi d *congruet. Tum verò ob æqualitatem angulorum F, B, & I, C etiam* e *F L cadet ſupra* B *A, & I L ſupra C A. Ergo etiam punctum L, incidet in punctum A; (ſi enim caderet extra A, latera F L, I L, non inciderent in latera B A, C A.) Ergo omnia ſunt per axioma 7. æqualia.* d *Per axio.* 8. e *Per axio.* 8.

PROPOSITIO V.

Fig. 26.

TRianguli Iſoſcelis ſeu æquicruris ad baſim anguli (A,C) æquales ſunt.

Intelligatur triangulum A B C bis poſitum, ſed ſitu converſo *c b a*. Quoniam igitur in duobus triangulis A B C, *c b a*, ex hypotheſi æquale eſt latus A B, lateri *c b*, & latus C B lateri *a b*,& angulus B angulo *b*;etiam *b* ad baſim angulus A angulo *c* æqualis erit. Quod erat demonſtrandum, iidem enim ſunt anguli C & *c*.

b. Per. 4.l.1.

Corollarium.

ÆQuilaterum ergo triangulum, etiam æquiangulum eſt.

PROPOSITIO VI.

Fig. 26.

SI in triangulo (A B C) duo anguli (A & C) æquales fuerint, etiam latera (AB,C B) iis oppoſita, æqualia erunt.

Intelligatur triangulum AB C bis poſitum, ſed ſitu converſo *c b a*.Quoniam igitur in duobus triangulis A B C,*c b a* æquatur latus unum A C,uni lateri *c a*,& angulus A angulo, *c*,& angulus C angulo.*a* etiam reliqua omnia *c* erunt æqualia,ac proinde

c Per Schol. prop. 4.

nde latus A B æquabitur lateri *c b*; quod rat demonſtrandum, eædem enim ſunt lineæ C B & *c b*.

Corollarium.

Æ*Quiangulum ergo triangulum, etiam æquilaterum eſt.*

PROPOSITIO VII.

E*St propter* 8, *quæ ſine illa ſeorſim propoſita demonſtrabitur.*

PROPOSITIO VIII.

SI *duo triangula habuerint omnia latera ſibi mutuo æqualia* (*A C ipſi E F ; C B ipſi F I ; A B ipſi E I ;*) *etiam angulos omnes æqualibus lateribus oppoſitos habebunt æquales* (*C ipſi F ; A ipſi E : B ipſi I.*) *Fig.* 27.

Ponatur enim latus AB ſupra ſibi æquale E I. Tum verò punctum C vel incidet in punctum F vel non. Si incidat in F, tota triangula congruent, ac proinde omnes anguli *a* æquales erunt. a *Per axi.* 7.

Si C, cadat extra F, ducatur F C. Quoniam per hypotheſim latera E F, A C æquantur, erit *b* angulus E F C par angulo E C F. ergo I F C major erit, quam E C F ergo I F C multo major erit, quam I C F. Rurſum, quia per hypotheſim I F, B C, æ- *Fig.* 28. b *Per* 5. *l.* 1.

 quantur,

c *Per.5,l.1.* quantur, erit I F C *c* par I C F. Ergo I F C & multò major eſt quam I C F, & æqualis, quod eſt impoſſibile. Ergo C non cadit extra F. Ergo &c.

Plures caſus, quos hoc theorema admittit, conſulto prætermiſi, ne tyrones fatigarem. Neque verò difficulter eorum demonſtratio ex demonſtratione jam poſita elicietur.

PROPOSITIO IX.

Fig. 2.9.

D*Atum angulum rectilineum (I A L) bifariam ſecare.*

Ex lateribus anguli accipe circino æquales A B, A C; centris B ac C deſcribe duos æquales circulos ſe ſecantes in F, ducaturque recta F A. Hæc angulum biſecabit.

Ducantur enim B F, C F; triangula F A B, F, A C ſunt ſibi mutuo æquilatera; nam latera A B. A C ex conſtitutione æqualia ſunt, & latera B F, C F, quia æqualium circulorum ſemidiametri, etiam æquantur; & A F utrique triangulo commune eſt. Ergo anguli B A F, C A F *a* æquales ſunt. Biſectus eſt ergo datus angu- a *Per. 8.l.1.*
lus I A L. quod erat faciendum.

Corollarium.

HInc patet quomodo angulus ſecari poſſit in æquales angulos 4. 8. 16. &c. ſingulas nimirum partes iterum biſecando

Scho-

Scholium.

METhodum ſecandi angulos in æquales quotcunque, circino & regulâ hactenus nemo docuit.

Ex Pappo tamen & Archimede habemus curvas quaſdam lineas, quadratricem videlicet & ſpiralem, quarum adminiculo id obtinetur. Anguli triſectio perficitur à Pappo l. 4. prop. 31. præſidio hyperboles, quod etiam obtineri poteſt ope parabolæ, vel chonchoidis.

Mechanice datum angulum in quocumque ſecabis æquales angulos; ſi ex anguli vertice A tanquam centro intra anguli crura arcum deſcribas, eumq; dividas in quot placuerit æquas partes; rectæ enim ex A per diviſionum puncta emiſſæ, angulum ſecabunt in partes totidem æquales. Fig. 30.

PROPOSITIO XX.

DAtam rectam finitam (A B) ſecare bifariam. Fig. 31.

Super data A B fac triangulum æquilaterum *a* A G B. Angulum ejus G *b* biſeca per rectam G C. Eadem biſecabit rectam A B datam.

a Per 1. l. 1.
b Per præced.

Nam in triangulis X, Z, latus C G eſt commune, & per conſtructionem G B, G A æqualia, anguliq; iis contenti A G C. B G C æquales. Ergo baſes A C, B C, *c* æquantur

c Per 4. l. 1.

quantur. Biſecta eſt ergo data A B Quod erat faciendum.

Pro praxi ſatis erit centris A & B duos æquales circulos deſcribere, ſe ſecantes in G & L, ac ducere rectam G L.

PROPOSITIO XI.

Fig. 32. EX *dato puncto (A) in data recta (L I) perpendicularem excitare.*

Circino cape æquales A C, A F. Centris C, & F deſcribe duos æquales circulos ſe ſecantes in B. Ex B ad A ducta recta erit perpendicularis.

Ducantur enim C B, F B. Triangula X, & Z, ſibi mutuo æquilatera ſunt. Ergo anguli C A B, F A B *a* æquales. Ergo B A *b* perpendicularis eſt. Ex dato igitur puncto &c. Quod erat faciendum.

a Per 8. l. 1.
b Per defin. 14.

Praxis tam huius quam ſequentis expeditur facillime præſidio normæ.

PROPOSITIO XII.

Fig. 33. EX *dato extra rectam infinitam (L Q) puncto (A) perpendicularem ducere.*

Centro A deſcribe circulum, qui ſecet datam L Q in C & I. Rectam C I biſeca *c* rectâ A B. Ea erit perpendicularis.

c Per 10. l. 1.

Ducan-

Ducantur enim A C, A I. Quoniam per conſtructionem triangula X & Z ſunt mutuo æquilatera; erunt anguli *d* C B A, I B A æquales. Ergo A B perpendicularis *e* eſt. Ex dato igitur puncto &c. Quod erat faciendum. d *Per. 8. l. 8.* e *Per def. 14.*

PROPOSITIO XIII.

Recta (B A) ſuper rectam (C F) conſiſtens aut duos rectos angulos facit, aut duobus rectis æquales. *Fig. 34.*

Nam ſi B A inſiſtat perpendiculariter, erunt per def. 14. anguli B A C, B A F, utrimque recti. Si vero B A inſiſtat oblique, excitetur *a* perpendicularis A L. Quia tum anguli inæquales C A B, F A B eundem locum occupant, quem duo recti C A L, L A F, ac proinde iis congruunt, erunt *b* his illi æquales. Quod erat demonſtrandum. a *Per. 11. l. 1.* b *Per axio. 7.*

Corollaria.

1. Eodem modo demonſtrabitur ſi plures rectæ, quàm una, eidem rectæ inſiſtant, angulos effici duobus rectis æquales.

2. Duæ rectæ invicem ſecantes B A C, F A L efficiunt angulos, quatuor rectis æquales. Patet ex propoſ. *Fig. 37.*

Fig. 36. 3. Omnes anguli circa unum punctum conſtituti conficiunt quatuor rectos. Patet ex Corol. 2. ſunt enim quatuor recti in plures partes ſecti.

PROPOSITIO XIV.

Fig. 35. *SI duæ rectæ (X R, Z R) ad idem utrimque punctum rectæ Q R faciant angulos (X R Q, Z R Q) duobus rectis æquales; (X R, Z R) unam rectam efficient.*

b Per. 13. l. 1. c Contra axio. 9. Si negas faciant X R B R unam rectam. Ergo anguli X R Q, Q R B *b* conficient duos rectos, quod *c* eſt abſurdum, cum ex hyp. X R Q, Q R Z duos rectos efficiant.

PROPOSITIO XV.

Fig. 37 *SI duæ rectæ (B C, F L) ſe ſecuerint in (A.) erunt anguli ad verticem (A) oppoſiti, æquales.*

a Per. 13. l. 1. b Per eand. c Per axio 1. Nimirum L A B ipſi C A F, & B A F ipſi L A C. Nam quia B A inſiſtit rectæ L F, erunt L A B, F A B, *a* pares duobus rectis. Et quia F A inſiſtit rectæ B C, erunt *b* quoque F A C, F A B partes duobus rectis. Ergo *c* duo ſimul L A B, F A B æquantur duobus ſimul C A F, F A B. Abla-

to igitur communi F A B, remanent *d* æ- *d Per axio 3.*
quales L A B, C A F. Eodem modo o-
ſtendam æquales eſſe B A F, L A C.

PROPOSITIO XVI. XVII.

Continentur in prop. 32. Neque ante illam adhibentur.

PROPOSITIO XVIII.

In omni triangulo angulus (A) major eſt, qui majori lateri (B O) opponitur: (B) minor, qui minori (A O.) *Fig. 38.*

Nequit A, eſſe par B, alias *a* latera B O, *a Per. 6. l. 1.*
A O æquarentur contra hypotheſim. Nequit etiam A minor eſſe quam B. Nam ſi A minor eſt, B major, poterit intra angulum B per rectam B F fieri angulus A B F æqualis A. Tum vero per 6: æquales erunt B F, A F, & ſi addas utrique, O F, erunt B F, F O æquales A O. Sed A O per hyp. minor eſt quàm B O. Ergo etiam B F, F O minores ſunt quàm B O, quod repugnat definitioni lineæ rectæ, quæ eſt omnium breviſſima. Angulus igitur A nec minor eſt angulo B, nec æqualis. Ergo major; quòd erat demonſtrandum.

PRO-

PROPOSITIO XIX.

Fig. 38. *IN triangulo latus (B O) majus eſt, quod opponitur majori (A) angulo : (A O) minus, quod minori (B.)*

Eſt converſa prioris. B O non eſt minus quam A O, alias per 18. angulus A eſſet minor angulo B contra hyp. Neq; etiam B O æquale eſt A O, alias per 5. anguli A, B, æquarentur, rurſus contra hyp. Ergo B O majus eſt quam A O. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XX.

OMnis tranguli duo qualibet latera reliquo ſunt majora.

Eſt Archimedi inſtar axiomatis; immediatè ſiquidem patet ex definitione Archimedeâ lineæ rectæ, quam vide ſupra in definitionibus.

PROPOSITIO XXI.

Fig. 39. *SI à terminis unius lateris (A B) intra triangulum duæ rectæ junguntur (A O, B O) hæ lateribus trianguli (A C, B C) minores ſunt, majorem vero angulum (A O B) comprehendunt.*

1. Pars.

1. Pars. Produc A O in F. A C, C F ſunt *a* majores, quam A F. Additâ ergo communi F B, erunt A C, C B majores quam A F, F B: Rurſum OF, BF ſunt *b* majores, quam O B. Additâ ergo communi A O, erunt A F, F B majores, quam A O, O B. Ergo A C, C B ſunt multò majores, quam A O, O B. *a Per 10. l. 1.* *b Per eand.*

2. Pars demonſtrabitur in Coroll. 2. partis primæ prop. 32. Eâ interim non utemur.

PROPOSITIO XXII.

EX datis tribus rectis (B O, L B, L O) quarum duæ quælibet reliquâ ſint majores, triangulum conſtituere. *Fig. 40.*

Aſſumatur datarum una B L, atque una ejus extremitate B acceptâ pro centro, intervallo alterius data B O deſcribatur arcus.

Deinde acceptâ pro centro extremitate altera L, intervallo tertiæ L O deſcribatur arcus priorem ſecans in O: ducanturque rectæ B O, L O. Dico factum.

Demonſtratio patet ex conſtructione.

PROPOSITIO XXIII.

AD datum in rectâ punctum (B) angulum efficere æqualem dato (A.) *Fig. 40.*

Ducatur utcunque C F ſecans latera da-

ti

ti anguli A. In data recta ex B accipe B L parem A F. Centro B intervallo A C deſcribe circulum: item alium centro L intervallo F C qui priorem ſecet in O. Ex O ad B & L duc rectas.

Erit angulus L B O par dato A.

Nam per conſtr. triangula ſibi mutuo ſunt æquilatera, Ergo per 8. anguli B & A æquales.

Scholium.

IN gratiam tyronum viſum eſt hic non nulla ad praxim angulorum neceſſaria proponere.

Fig. 41 *Anguli menſura eſt circuli peripheria, quæ ex A vertice anguli tanquam centro deſcribitur, ut patebit ex prop. vltima l. 6.*

Itaque quot gradus continebit arcus B C inter anguli B A C crura intereeptus, tot graduum dicetur eſſe angulus B A C. Et quoniam rectum angulum B A F metitur quadrans peripheriæ B F, gradus 90. continens, dicetur rectus angulus eſſe graduum 90. Similiter quia duos rectos menſurat dimidia circumferentia in 180. gradus ſecta, & quatuor rectos circumferentia tota ſecta in gradus 360. dicentur duo recti efficere gradus 180. & quatuor recti gradus 360. His prænotatis praxes angulorum ſunt.

Fig. 42. I. *Ad datum in recta punctum B. angulum ſtatuere parem dato A. Ex A dati anguli vertice tanquam centro inter latera arcum deſcribe C F.*

Centro

Centro B puncto dato, deſcribe eodem intervallo arcum L Z: ex quo aufer L O parem C F. Per B & O duc rectam: erit L B O par dato A.

2. *Dati anguli O P Q gradus examinare. Fit hoc facillime per ſemicirculum corneum tranſparentem, in 180. gradus diviſum: Centrum ſemicirculi pone ſupra P verticem anguli, & ſemicirculi radium P L ſupra anguli latus P Q. Arcus L O inter anguli crura interceptus oſtendet, quot graduum ſit datus angulus.* Fig. 43.

3. *Angulum conſtruere datos continentem gradus. 42. Duc rectam X Q, in qua ſigna punctum P. Super P pone ſemicirculi centrum ejuſq; ſemi diametrum P L ſupra P Q. Ab L numera gradus 42. uſque in O. per O ex P ducta recta dabit angulum O P L graduum 42.*

Horum omnium demonſtratio pendet ex ultima prop. lib. 6.

PROPOSITIO XXIV. & XXV.

SI duo triangula (B A C, B A F) duo latera (B A, A C) duobus (B A, A F,) alterum alteri, æqualia habuerint; unum vero triangulum angulum illis lateribus contentum (B A F) majorem habeat altero (B A C;) habebit quoque baſim B F majorem baſi (B C.) Fig. 44.

Et ſi baſim majorem habuerit, habebit angulum majorem.

Centro

Centro A deſcribe per C circulum; is tranſibit per F, quia AC, AF ponuntur æquales. Ergo B F cadit ſupra C. Iunge CF. Angulus B C F eſt major angulo A C F; hoc eſt per 5. angulo A F C, hoc eſt multò major angulo B F C. Ergo *a* B F oppoſita majori angulo B C F major eſt, quam B C. oppoſita minori B F C.

a *Per 19. l.1.*

2. Pars patet ex prima parte & ex prop. 4.

PROPOSITIO XXVI.

Fig. 25.

SI duo triangula (X Z) duos angulos duobus æquales habuerint alterum alteri (B ipſi F & C ipſi I,) & unum latus uni lateri æquale, vel quod inter æquales angulos exiſtit (ut B C, F I) vel quod uni æqualium angulorum opponitur (ut A C, L I:) reliqua omnia erunt æqualia.

Ponantur primò æqualia eſſe latera B C F I, inter æquales angulos poſita: tum verò reliqua etiam omnia æqualia eſſe demonſtratum eſt in ſcholio prop. 4.

Ponantur deinde latera A C, LI æqualibus angulis B & F oppoſita, eſſe æqualia. Quia anguli B C per hyp. æquantur angulis F, I, etiam reliqui A, L æquales erunt per corol. 8. p. 32. quæ ab hac non dependet. Ergo

Ergo per primam partem omnia reliqua ſunt æqualia.

PROPOSITIO XXVII.

SI duas rectas (A B, C F) parallelas ſecuerit recta G O: erunt 1. *æquales alterni anguli (R L O, Q O L, item B L O, C O L)* 2. *externus (G L B) æqualis interno ad eandem partem (LOF) (item G L R ipſi L O C.)* 3. *Duo ad eandem partem interni ſimul (A L O, C O L) æquales duobus rectis: item duo B L O, F O L duobus rectis æquales.* Fig. 45.

1. Pars. Ex O & L duc perpendiculares O R, L Q: erunt *a* hæ ad utramque parallelam A B, C F perpendiculares, & per def. 36. inter ſe æquales. Æquales quoque *b* ex parallelis auferent partes R L, Q O. Ergo triangula, X, Z, ſibi mutuo æquilatera ſunt. Ergo *c* anguli R L O, Q O L alterni æqualibus lateribus R O, Q L oppoſiti, ſunt æquales. Quod erat primum. Ex quo patet etiam alternos reliquos B L O, C O L æquales eſſe. Nam quia tam B L O, A L O, quàm C O L, F O L æquantur *d* duobus rectis; erunt B L O, A L O æquales ipſis C O L, F O L. Ablatis ergo æqualibus R L O,

Fig. 46.
a *Per axio. 11.*
b *Per axio. 12.*
c *Per 8. l. 1.*
d *Per 13. l. 1.*

RLO,FOL,erunt reliqui BLO,COL etiam æquales.

2. Pars. GLB æquatur ad verticem *e* oppoſito RLO: Sed RLO æquatur per 1. partem LOF. Ergo GLB externus æquatur interno LOF: quod erat alterum.

e Per 15.l.1.

3. Pars. ALO per 1. partem æquatur FOL. Atqui FOL cum COL *f* facit duos rectos. Ergo etiam ALO cum COL facit duos rectos. Quod erat tertium.

f Per 13.l.1.

PROPOSITIO XXVIII.

Fig. 47.

SI duas rectas (AB, CF) ſecans recta (GO) alternos angulos (ALO, FOL) æquales fecerit, erunt (AB, CF) parallelæ.

Si negas, ſit ergo alia XLZ per punctum L ad CF parallela.

Ergo *a* angulus XLO par eſt alterno FOL; Quod fieri non poteſt, cum per hyp. ALO par ſit eidem FOL.

a Per præc.

PROPOSITIO XXIX.

Fig. 45.
Fig. 46.

SI duas rectas (AB, CF) ſecans recta (GO) fecerit externum (GLB) æqualem oppoſito interno (LOF) vel duos ad eaſdem partes internos ALO, COL. pares

pares duobus rectis, erunt (AB, CF) parallelæ.

Per 15. GLB æquatur ALO oppoſito ad verticem. Sed per hyp. GLB æquatur LOF. Ergo etiam ALO æquatur ſibi alterno LOF. Ergo *b* AB, CF ſunt parallelæ: b *Per præced.*

Deinde COL cum FOL facit duos rectos. Sed per hyp. idem COL etiam cum ALO facit duos rectos. Ergo ALO, FOL alterni æquales ſunt. Ergo rurſum AB, CF *c* ſunt parallelæ. c *Per præc.*

Corollarium.

EX ſecunda parte patet omne rectangulum eſſe parallelogrammum.

PROPOSITIO XXX.

SI duæ rectæ (AB, CF) ſint parallelæ ad eandem rectam (DN) erunt inter ſe parellelæ. Fig. 45.

Patet per ſe, & ex præcedentibus. Nam ſi omnes ſecentur à recta GO, erit *a* angulus externus GLB par interno LDN. eſt vero LDN externus *b* reſpectu DOF, ac proinde æqualis. Ergo etiam GLB par eſt LOF. Ergo AB, CF ſunt *c* parallelæ. a *Per 27. l. 1.* b *Per 27. l. 1.* c *Per præc.*

PROPOSITIO XXXI.

Fig. 48. *PEr datum punctum (A) parallelam ducere ad rectam datam (C F.)*

a Per 23. l. 1. Ex A ducatur utcunque A L, ſecans datam F C. Ad punctum A fiat *a* angulus L A S par angulo A L F. Erit A S parallela ad C F, ut patet ex 28. cum alterni anguli S A L, F L A ſint æquales.

Praxis: ducta A L, centro L deſcribe arcum I Q, & centro A eodem intervallo arcum O X; ex quo aufer O B parem I Q. Per A & B ducta recta erit parallela.

Demonſtratio pendet ex 29. l. 3.

Fig. 49. *Aliter. Centro quopiam P deſcribe circulum qui tranſeat per datum punctum A, & ſecet datam C F in Q & O. Arcui Q A accipe æqualem O N, recta A N erit parallela.*

Demonſtratio pendet ex 29. libri 3. & ex 28. hujus.

Scholium.

DEmonſtrata jam igitur eſt parallelarum theoria independenter ab axiomate, quod Euclides, ejuſque interpretes aſſumunt minus rectè: cum non ſit axioma, ſed theorema, cujus veritas non magis per ſe appareat, quam ipſius 29. propoſitionis. Quia tamen deinceps ſæpius adhibebitur, id hoc loco jam facilè ex præmiſſis demonſtrabimus.

Theo-

Theorema.

SI recta M A incidens in rectas B C, A D, faciat angulos internos ad eaſdem partes B A D, A B C, duobus rectis minores, rectæ B C, A D concurrent verſus eam partem, quam ſpectant anguli duobus rectis minores. Fig. 50.

Quoniam per hyp. C B A, D A B duobus rectis ſunt minores; fiant C B A, X A B duobus rectis æquales: Eruntque B C; A X a *parallelæ. Aſſumo tanquam axioma per ſe notum, inter rectas A D, A X in infinitum productas duci poſſe aliquam ad A M parallelam, puta Z X, quæ major ſit quam A B. Accipiatur ipſi Z X æqualis A R; & junge Z R. Quoniam A R, Z X ſunt parallelæ, erunt* b *alterni X Z A, R A Z æquales. Sunt autem & latera X Z, Z A æqualia lateribus R A, A Z, per conſtr. Ergo etiam* c *anguli R Z A, X A Z æquales ſunt. Ergo R Z, eſt* d *parallela ad A X. Sed etiam B C eſt parallela ad A X. Ergo R Z & B C ſunt* e *paralellæ. Eſt igitur B C & parallela ad R Z, & incluſa triangulo A R Z. Ergo cum produci in infinitum poſſit, neceſſariò occurret aliquando rectæ A Z, nam neque evadere poteſt per ſibi parallelam R Z, neque pertingere in A, aliàs duæ rectæ haberent commune ſegmentum. Liquet ergò propoſitum.*

a Per 29. l. 1.
b Per 27. l. 1.
c Per 4. l. 1.
d Per 28. l. 1.
e Per 30. l. 1.

Demonſtratio Clavii eſt à parallelis independens, ſed prolixiſſima & multùm operoſa: Procli nititur hoc principio, quod recta unam parallelam ſecans, etiam alteram ſectura ſit, ſi producatur. Verum hoc per ſe notum non eſt, ob orationem datam ad def. 36.

Corollarium.

Fig. 50. *Hinc patet rectas non parallelas concurrere; de quo dubitari poterat ob rationem allatam ad def. 36. Sint rectæ non parallelæ BC, AZ. Duc A X parallelam ad B C, erunt XAB, CBA*

a Per 27. l. 1. *duobus rectis a æquales. Ergo Z A B, C B A ſunt duobus rectis minores. Ergo per theorema jam demonſtratum B C, A Z concurrunt.*

PROPOSITIO XXXII.

PARS I.

Fig. 51. *Omnis trianguli externus quivis angulus (F B C) duobus internis oppoſitis (A & C) æqualis eſt.*

a Per 31. l. 1. Per B duc *a* BL parallelam ad AC. Quia duas parallelas B L, A C ſecat F A, erit ex-

b Per 27. l. 1. ternus angulus FBL interno A *b* æqualis. Et quia eaſdem parallelas B L, A C ſecat etiam recta B C, erit L B C ſibi alterno C

c Per eand. *c* æqualis. Ergo totus F B C æquatur utrique ſimul A & C. Quod erat demonſtrandum.

Corollaria.

Fig. 51. 1. Externus angulus (F B C) quolibet internorum oppoſitorum, A, vel, C, major eſt.

2. An-

2. Angulorum (C & A O B) eandem baſim (AB) habentium, major eſt (AOB,) qui intra cadit. Fig. 39.

Producatur enim A O, in F. A O B per hanc major eſt quam O F B; & OFB per hanc eandem major eſt quàm C. Ergo A O B multò major eſt quam C.

3. Si ab uno puncto (A) in unam rectam (B C,) incidant duæ rectæ altera (AO) obliquè, perpendiculariter verò altera (AF;) hæc cadet verſus partes acuti anguli AOB. Cadat enim, ſi fieri poteſt, verſus obtuſum A O C, puta in Q. Igitur acutus AOB erit xternus, reſpectu recti A Q B, ac proinde llo major per coroll. 1, quod eſt abſurdum. Fig. 55.

PROPOSITIO XXXII.

PARS II.

Omnis trianguli tres ſimul anguli, duobus rectis ſunt æquales.

Ac proinde conficiunt gradus 180.

Produc unum latus A B in F. Externus gulus F B C duobus internis oppoſitis A C æqualis *a* eſt. Atqui *b* FBC cum CBA cit duos rectos. Ergo etiam duo A & C eodem C B A efficiunt duos rectos. od erat demonſtrandum. Fig. 52.

a Per 1 partem hujus

b Per 13, l. 1.

Aliter. Ducatur HM parallela lateri A C. Fig. 53.

A C. Anguli alterni tam O, A, quam N, C æquales c ſunt. Sed O, Q, N. conficiunt d. duos rectos. Ergo etiam A, C. Q duos rectos conficiunt: quod erat demonſtrandum.

c Per 27. l. 1.
d Coroll. 1. p. 13. l. 1.

Corollaria.

4. TRes ſimul anguli cujuſvis trianguli æquales ſunt tribus ſimul cujuſcunque alterius.

5. Si in triangulo unus rectus eſt, reliqui ſunt acuti.

6. Si in triangulo unus eſt rectus, reliqui duo ſimul etiam unum rectum conficiunt.

7. In triangulo angulus, qui æquatur duobus reliquis, rectus eſt.

8. Cum ſcitur quot graduum ſit unus angulus, ſcitur etiam quot gradus faciant duo reliqui ſimul. Et cum ſcitur quot gradus faciant duo anguli, aut eorum ſumma, ſcitur etiam quot gradus efficiat tertius.

9. Cum in uno triangulo duo anguli aut ſinguli, aut ſimul, æquales ſunt duobus angulis aut ſingulis, aut ſimul, in altero triangulo; etiam tertius tertio æqualis erit.

10. Cum duo triangula unum angulum æqualem habent, etiam reliquorum ſummæ æquantur.

11. Cum in Iſoſcele angulus æquis cruribus contentus eſt rectus, reliqui ad baſim

ſunt

ſunt ſemirecti. Et Iſoſcelis ad baſim anguli ſemper ſunt acuti.

12. Trianguli æquilateri angulus facit duas tertias unius recti. Facit enim tertiam partem duorum rectorum. Ergo duas tertias unius.

13. Hinc anguli recti (B A C) facillima triſectio; ſi ſuper A C fiat triangulum æquilaterum Z. Nam cum F A C ſint duæ tertiæ unius recti, erit B A F recti una tertia. *Fig. 54.*

14. Perpendicularis A F eſt breviſſima omnium quæ ex puncto (A) ad rectam aliquam duci poſſunt. Quoniam enim angulus F rectus eſt, erit per coroll. 5. A O F acutus. Ergo *f* A F minor quam A O quælibet. *Fig. 55.*

f Per 19. l. 1.

15. Ex uno puncto ad unam rectam ntum una perpendicularis cadit. Patet ex roll. præced.

Scholium.

[*U*jus pulcherrimi, fœcundiſſimique theorematis, cujus per Matheſim univerſam uſus promenſus, inventor eſt Pythagoras teſte Eudeteri geometrà. Frequentiſſimè eiuſdem me- Ariſtoteles, qui illud etiam exemplum ſtatuit ctiſſimæ demonſtrationis. Sed quemadmodum c propoſitione jam didicimus, quot rectis anejus anguli æquivaleant, ita ejuſdem beneujuſlibet figuræ rectilineæ ſive interni, ſive ex-*

 terni

terni anguli, quot rectos conficiant, præclarè innoteſcet tribus ſequentibus theorematibus.

Theorema 1.

Fig. 56. OMnis quadranguli quatuor ſimul anguli efficiunt quatuor rectos.

Nam ſi per oppoſitos angulos ducas rectam BF, *hæc quadrangulum in duo triangula ſecabit, quorum anguli ſimul conficiunt* a *rectos quatuor.*

a Per 32. l. 1.

Theorema 2.

OMnes ſimul anguli cujuſcunque figuræ rectilineæ conficiunt bis tot rectos demtis quatuor, quot ſunt latera figuræ.

Fig. 57. *Ex quovis puncto A intra figuram, ducantur ad omnes figuræ angulos rectæ, quæ ſecabunt figuram in tot triangula, quot habet latera. Quare cum ſingula triangula* a *conficiant duos rectos, omnia ſimul conficient bis tot rectos, quot ſunt latera. Sed anguli circa punctum A,* b *conficiunt quatuor rectos. Ergo ſi ab omnium triangulorum angulis demas angulos circa A, anguli reliqui, qui componunt angulos figuræ, conficient bis tot rectos, demtis quatuor, quot ſunt latera figuræ.*

a Per 32. l. 1

b Coroll. 3, p. 13. l. 1.

Hinc patet omnes ejuſdem ſpeciei rectilineas figuras æquales habere angulorum ſummas; Quod admiratione dignum eſt.

Praxis. Duplica denominatorem figuræ; à producto aufer 4. reſtabunt anguli recti, quos conficiunt anguli interni figuræ.

Theore-

Theorema 3.

OMnes ſimul externi anguli cujuſcunque figuræ rectilineæ, conficiunt quatuor rectos. Fig. 58.

Nam ſinguli figuræ interni anguli, cum ſingulis externis conficiunt duos c rectos. Ergo interni ſimul omnes, cum omnibus ſimul externis conficiunt bis tot rectos, quot ſunt latera figuræ. Sed (ut in præced. oſtendimus) interni ſimul omnes etiam cum quatuor rectis, efficiunt bis tot rectos, quot ſunt latera figuræ, Ergo externi anguli, & quatuor recti æquantur. c Per 13. l. 1.

Mira ſanè hæc figurarum rectilinearum proprietas eſt: ex qua illud etiam conſequitur, omnes cujuſcunque ſpeciei rectilineas figuras æquales habere externorum angulorum ſummas. Itaque trianguli alicujus tres externi anguli æquales ſunt mille externis angulis figuræ millelateræ; Quæ prorſus admiratione ſunt digna.

PROPOSITIO XXXIII.

SI duas rectas æquales & parallelas (A B, C F) jungant duæ aliæ (A C, B F) erunt etiam illæ æquales parallelæ. Fig. 59.

Parallelas A B, C F ſecet A F. Erunt in triangulis Q R alterni anguli B A F, C F A a æquales. Ponitur autem latus A B æquale a Per 27. l. 1.

le lateri C F, & A F utrique triangulo eſt
b Per 4. l. 1. commune. Ergo *b* baſes B F, A C æquantur (quod erat primum.) Et anguli ad baſim A F B, F A C ſunt æquales: ac proinde A F incidens in rectas A C, B F facit al-
c Per 28 l. 1. ternos A F B, F A C æquales. Ergo *c* A C, B F ſunt etiam parallelæ. Quod erat alterum.

PROPOSITIO XXXIV.

Fig. 59. P*Arallelogrammi oppoſita latera & anguli æquantur, ipſumque à diametro biſecatur.*

a Per defin. 35. Quoniam A B, C F ſunt *a* parallelæ, in eaſque incidit A F, erunt alterni B A F,
b Per 27. l. 1. C F A *b* æquales. Item quia A C, B F ſunt
c Per def. 35. *c* parallelæ, in eaſque incidit A F, erunt *d*
d Per 27, l. 1. alterni C A F, B F A æquales. Ergo totus B A C toti B F C æqualis eſt. Eodem modo oſtendam B & C æquales eſſe. Quod erat primum.

Quia verò jam oſtendi triangula Q R, quæ unum latus A F commune habent, etjam angulos lateri A F adjacentes habere æquales, nimirum B A F ipſi C F A, &
e Per 26, l. 1. C A F ipſi B F A. Erunt *e* etiam latera A B ipſi F C, & B F ipſi C A, æqualia, itemque ipſa triangula.

Scho-

Scholium.

Partim ex hoc theoremate, partim ex definitione libro 2. præmittendâ, facilè elicitur dimenſio parallelogrammi rectanguli. Illius area producitur ex multiplicatione duorum laterum contiguorum A F, A C. Sit exem. gr. A F pedum 8, *AC*, 4. *Duc* 8. *in* 4. *proveniunt* 32. *pedes quadrati pro area rectanguli.* Fig. 60.

Quadrata vero area habetur ex uno latere (F I) per ſe ipſum multiplicato: ut ſi latus (F I) ſit 5. *pedum; duc* 5. *in ſe, proveniunt.* 25, *pedes quadrati pro area quadrati.* Fig. 61.

Demonſtratio ex hac prop. patet ductis per laterum diviſiones parallelis.

PROPOSITIO XXXV. & XXXVI.

Parallelogramma ſuper baſi eadem (A B) vel æquali, & inter eaſdem parallelas (C Q, A X) conſtituta, ſunt æqualia. Fig. 62.

Quia A L, B Q *a* ſunt parallelæ, eaſque ſecat C Q; erit *b* externus C L A par interno F Q B. Deinde quia tam C F quam L Q æquantur *c* eidem A B, erunt C F, L Q, æquales. Adde utriſque F L; erunt totæ CL, F Q æquales. Inſuper & A L, B Q *d* æquales

a Per def. 35.
b Per 27. l. 1.
c Per 34. l. 1.

d Per eand. e Per 4. l. 1.

d æquales ſunt. Triangula igitur C L A, F Q B æqualia *e* ſunt. Ergo ablato communi F O L, plana F O A C, Q B O L remanent æqualia. Quibus utriſque adde planum A O B, fiunt parallelogramma tota A C F B, A L Q B æqualia. Quod erat demonſtrandum.

Hæc propoſitio fiet univerſalis p. 1. lib. 6. Obſervent hic tyrones, quamvis parallelogramma inter eaſdem parallelas ſine fine productas in infinitam longitudinem extendantur ex eadem baſi A B, ſemper tamen manere æqualia ex vi demonſtrationis jam datæ.

Scholium.

Fig. 62.

Ex hoc theoremate habetur dimenſio parallelogrammi cujuſcunque. Illius igitur area producitur ex altitudine Q X ſeu C A ducta in baſim A B.

Nam area rectanguli C B parallelogrammo B L æqualis fit f ex A C ducta in A B. Ergo &c.

f Per ſchol. præced.

PROPOSITIO XXXVII. & XXXVIII.

Fig. 63.

Triangula (A C B, A F B) ſuper baſi eadem (A B) vel æquali inter eaſdem parallelas (C I, A Z) conſtituta, ſunt æqualia.

Lateribus A C, A F duc parallelas B L, B I,

BI. Parallelogramma, A C L B, A F I B ſunt *a* æqualia. Sed horum triangula data *b* ſunt dimidia. Ergo triangula data *c* ſunt æqualia.

a Per præc.
b *Per 34. l. 1.*
c *Per axio. 6.*

Hæc propoſitio fiet univerſalis p. 1. l. 6. Idem hic tyrones notent in triangulis, quod eos notare juſſimus prop. præced. de parallelogrammis.

PROPOSITIO XXXIX. & XL.

TRiangula æqualia (*A C B, A F B*) ſuper eadem baſi (*A B*) vel æquali, ad eaſdem partes conſtituta, ſunt inter eaſdem parallelas (*A B, C F.*) *Fig. 64.*

Si negas, ſit C L parallela ad A B, & ducatur B L. Igitur A L B æquatur *a* A C B. Sed ex hyp. etiam A F B ipſi A C B æquale eſt. Ergo A L B, & A F B æqualia ſunt, pars & totum. Quod fieri non poteſt. Igitur &c.

a Per præc.

PROPOSITIO XLI.

SI triangulum (*A F B*) ſit in iiſdem parallelis cum parallelogrammo, (*A L*) & baſim eandem habeat (*A B*) vel æqualem, ipſius dimidium erit. *Fig. 65.*

Duc C B. Triangula A F B, & A C B *d* æquan-

d *Per 37. & 38. l. 1.*

e Per 34. l. 1. quantur. Sed *d* ACB eſt dimidium parallelogrammi A L. Ergo etiam A F B eſt dimidium A L. Quod erat demonſtrandum.

Scholium.

Fig. 65. *Ex hac, & ex ſcholio prop. 35. diſcimus, aream trianguli (AFB) cujuſcunque produci ex dimidia altitudine F I ducta in baſim (AB) vel ex dimidia baſi in altitudinem. Quare noto uno latere trianguli, & altitudine, ſive perpendiculari, quæ in latus notum ex angulo oppoſito ducitur, habetur trianguli dimenſio: ut ſi baſis AB ſit pedum* 100. *altitudo* FI, 85. *multiplica baſis dimidium* 50. *per* 85. *proveniunt* 4250. *pedes quadrati pro area trianguli* A F B. *Porro altitudo ſive perpendicularis illa, quando area trianguli peragrari poteſt, mechanicè innoteſcit, uti latera. Si area peragrari nequeat, invenietur geometricè altitudo per* 12. & 13. *l.* 2. *ut in ſcholio ibidem docebimus.*

In triangulo rectangulo altitudo eſt eadem cum alterutro latere circa angulum rectum. Hujus ergo ſemiſſis ducta in latus alterum recto adjacens dabit trianguli aream.

PROPOSITIO XLII.

Fig. 66. *Dato triangulo (ACB) æquale parallelogrammum facere habens angulum parem dato (O.)*

Baſim A B biſeca in F. per C duc C X parallelam A B *a.* Fac *b* angulum B A L parem dato O. Duc F I parallelam A L. *c* Erit A L I F, quod quæritur.

a *Per* 31. *l.* 1.
b 23. *l.* 1.
c *Per* 31. *l.* 1.

Ducatur enim F C. Parallelogrammum A I, angulum habet L A F parem dato, O; & eſt æquale triangulo dato A C B, cum tam *d* triangulum A C B, quàm *e* parallelogrammum A I, dupla ſint ejuſdem trianguli A C F.

d *Per* 38. *l.* 1.
e *Per præc.*

Corollarium.

DAto triangulo ACB habetur æquale rectangulum, ſi per C ducatur parallela lateri A B, & biſectâ A B in F; ex B erigatur perpendicularis B Q. Erit enim rectangulum ſub F B, & Q B par triangulo ACB. *Fig.* 66.

PROPOSITIO XLIII.

IN *parallelogrammo* (*B L*,) *complementa* (*B O, O L*) *eorum, quæ circa diametrum exiſtunt* (*R F & C S*) *ſunt æqualia.* *Fig.* 67.

Si per diametri A Q, punctum quodvis O ducatur C F parallela lateri A B, & R S parallela lateri B Q; ſecatur totum B L in quatuor parallelogramma, quorum duo circa diametrum ſunt, R F, C S, duo reliqua B O, O L, ſunt horum complementa.

Ea

Ea eſſe æqualia ſic oſtenditur. Triangula
a Per 34.l.1. A B Q, A L Q *a* æquantur, ſimiliter A R O,
b Per eand. O C Q *b* æquantur A F O, O S Q. Ergò ſi
ab æqualibus A B Q, A L Q, auferas æqualia, hinc A R O, O C Q, inde A F O, O S Q, æqualia remanent B O, & O L, Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XLIV.

Fig. 68. *AD datam rectam (O S) parallelogrammum conſtituere dato triangulo (V) æquale in angulo dato (X.)*

f Per 42.l.1. Fac *f* parallelogrammum R C dato V æquale, habens angulum R O C parem dato X, & pone latus R O in directum datæ O S.
g Per 31.l.1. Per S duc S Q *g* parallelam O C, cui occurrat B C producta in Q. Per Q & O ducta recta occurrat B R protractæ in A. Per A duc A L parallelam ad O S, cui occurrant C O, & Q S productæ in F & L. parallelogrammum O L eſt quod petitur.

i Per præc. Nam O L, æquatur R C; hoc eſt per
k Per 15.l.1. conſtructionem, dato triangulo V: & eſt ad datam O S, habetque angulum *k* F O S parem angulo R O C, hoc eſt per conſt. parem dato X.

PRO-

PROPOSITIO XLV.

DAto rectilineo (C B A) æquale parallelogrammum conſtruere ad datam rectam (I Q) & in dato angulo (H.) Fig. 69.

Rectilineam reſolve in triangula A,B,C ducendo rectas F.L, F.I.

Ad datam I Q in angulo dato, H, fac *a* parallelogrammum I V æquale triangulo, A. Tum producatur IR infinitè verſus P: & ad rectam R V, in angulo V R P fac *b* parallelogrammum R Z æquale trigono B. Rurſum ad rectam S Z in angulo Z S P fac parallelogrammum S G æquale trigono C. I G eſt parallelogrammum quæſitum.

a Per 44. l. 1
b Per eand.

Nam *c* angulus Z V R par eſt ſibi alterno I R V. Sed *d* Q V R & I R V ſunt æquales duobus rectis. Ergo etiam Q V R & Z V R duobus rectis æquantur. Ergo *f* Q V & Z V ſunt in directum. Pari modo oſtendam Q Z & G Z eſſe in directum. Ergo tota Q V Z G eſt vna recta, & quidem parallela ad I X, cum per conſt. Q V ſit ad I P parallela. Eſt vereo etiam *g* X G parallela ad I Q cum X G ſit parallela ad S Z, & S Z ipſi R V, & R V ipſi I Q.

c Per 27. l. 1
d Per eand.
f Per 14. l. 1.
g Per 30. l. 1.

Ergo *h* I G eſt paralle logrammum: eſſe autem quale petitur patet ex conſtructione

h Per defin. 35.

Scholium.

ADjungo problema utile futurum ad praxim propoſitionis 14. l. 2.

Fig. 70. *Dato quadrangulo B F rectangulum æquale deſcribere.*

Reſolve in triangula per rectam AC. Ex oppoſitis angulis dimitte perpendiculares B O, F I. biſeca AC in S. Ex S erige perpendicularem S L parem duabus B O, F I. Rectangulum ſub L S, & S A æquatur dato B F. Demonſtratio patet ex 41.

PROPOSITIO XLVI.

A Data recta (A B.) quadratum deſcribere.

Fig. 71. Erige duas perpendiculares æquales datæ A B nempe A C, B E, & junge C E. Dico factum.

a Per conſtr. Cum enim anguli A & B duo ſint *a* re-
b Per 29. l. 1. cti, erunt *b* A C, B E: parallelæ ſunt verò
c Per. conſtr. etiam *c* æquales. Ergo C E *d* A B ſunt pa-
d Per 33. l. 1. rallelæ & æquales, Ergo figura eſt parallelogramma, & æquilatera: anguli quoque omnes ſunt recti (cum enim A, & B ſint
e Per 34. l. 1. *e* recti, etiam recti erunt *f* oppoſiti, E, & C.) Ergo figura A E, eſt quadratum.

PRO-

PROPOSITIO XLVII.

IN omni triangulo (A B C) rectangulo, quadratum lateris (A C) quòd recto angulo opponitur, æquale eſt duobus ſimul reliquorum laterum (A B, C B) quadratis. Fig. 72.

Ducantur I C, B F, & B E parallela A F. Si angulis I A B, F A C rectis, ac proinde æqualibus, addatur communis B A C, erunt toti I A C, F A B æquales. Sunt verò in trianguli I A C, F A B etiam latera, quæ æquales illos angulos continent, inter ſe *a* æqualia, nempe, I A, C A, ipſis B A, F A, alterum alteri. Ergo triangula I A C, F A B, *b* æquantur: Quæ, quia cum parallelogrammis A B L I & Z A F E conſiſtunt in ijſdem baſibus I A, F A, & in ijſdem parallelis I A, L B C, & A F, E Z B ſunt *c* eorum dimidia. Ergo parallelogramma A B L I, Z A F E, vtpote æqualium dupla, erunt æqualia inter ſe. Eodem diſcurſu ductis rectis A X, B R oſtendam parallelogramma E C, B X æqualia eſſe. Totum igitur A R vtriſque I B, & B X æquale erit. Quod erat demonſtrandum.

a *Per. defin. quadrati.*
b *Per 4. l. 1.*
c *Per. 41 l. 1.*

Aſſumtum fuit L B C eſſe parallelam I A, adeoq; L B, B C eſſe vnam rectam. Id

verò patet ex 14. cum anguli L B A, & C B A ambo recti ſint per hypotheſim.

Scholium.

Hoc theorema (quod prop. 31. lib. 6. Euclides ad omnes figuras ſimiles extendit) Pythagoricum appellatur paſſim, ab inventore Pythagora; qui, ut teſtantur Proclus, Vitruvius, aliique, Muſis victimas immolavit; quod ſe in tam præclaro invento ab iis adiutum putaret. Ignorabat videlicet ſcientiarum Dominum, verum & unicum omnis ſapientiæ auctorem Deum; aut certè ſi cognovit, non ſicut Deum glorificavit. Frequens porro hujus theorematis & eximius per Mathematicam totam uſus eſt; ac viam inprimis ad incommenſurabiles magnitudines, arcanum ingens Geometricæ philoſophiæ cognoſcendas aperit.

Quadrati latus eſſe diametro incommenſurabile, celebratiſſimum eſt apud veteres Philoſophos, Ariſtotelem præſertim & Platonem, adeo ut qui hoc neſciret, eum Plato non hominem eſſe, ſed pecudem diceret. Notitia porro hujus myſterii duxiſſe videtur originē ex hac prop. 47. Nam cum in quadrato angulus A rectus ſit, erit quadratum diametri C B æquale quadratis laterum A B, A C ac proinde duplum unius. Quare cum quadratum diametri C B ſit 2. & quadratum lateris A B, ſit unitas, erit diameter C B radix quadrata, 2. & latus A B radix quadrata unitatis, ſive ipſa unitas, quarum proportio (ut ſuo loco demonſtrabitur) numeris explicari

Fig. 71.

plicari nequit, ac proinde incommenſurabiles ſunt.

Atque hoc vel unico argumento, tametſi cætera omnia deficerent, evidentiſſimè conficitur, magnitudines ex definito punctorum numero componi non poſſe; alias enim nullæ eſſent incommenſurabiles, omnium quippe menſura communis eſſet punctum.

His ſubiungo tria problemata ex eadem propoſitione deducta, quorum uſus frequentior.

Problema I.

D*Atis quotcunque quadratis, unum omnibus æquale conſtruere.* Fig. 73.

Dentur quadrata tria, quorum latera ſint A B, B C, C E. Fac angulum rectum F B Z infinita habentem latera, in eaq; transfer B A, & B C & junge A C. erit ex A C quadratum æquale a *quadratis A B, B C. Tum A C transfer ex B in X: & C E tertium latus datum, transfer ex B in E, & junge E X: erit quadratum ex E X æquale* b *quadratis ex E B (ſeu E C) & ex B X: hoc eſt æquale tribus datis quadratis ex A B, ex BC, ex C E.*

a Per 47. l. 1

b Per eand.

Problema 2.

D*Atis duabus rectis inæqualibus A B, B C, exhibere quadratum, quò quadratum majoris A B, excedit quadratum minoris B C.* Fig. 74.

Centro B intervallo B A deſcribe circulum. Ex C erige perpendicularem C E, occurrentem peri-

pheriæ in E. Quadratum ex C E eſt exceſſus quæ-ſitus.

c Per.47.l.1. Ducatur enim B E. quadratum B E, hoc eſt A B, æquatur c quadrato B C, & quadrato C E. Ergo &c.

Problema. 3.

NOtis duobus quibuſcunque lateribus trigoni rectanguli, reliquum invenire.

Fig. 75. Latera rectum angulum ambientia ſint A C A B, hoc 6. pedum, illud 8. Oporteat invenire quot pedum ſit C B recto oppoſitum. Duc 6. & 8. in ſe ipſa: orientur laterum quadrata 36. & 64. quorum ſumma eſt 100. Radix quadrata 100. nempe 10. dat pedes lateris B C quæſiti. Demonſt. patet ex 47. Num ſumma quadratorum B A & AC æquatur quadrato B C. Ergo horum ſummæ radix eadem eſt cum radice ſeu latere B C.

Nota ſint deinde latera A B, B C. hoc 10. pedem, illud 6. Oporteat invenire A C. Lateris A B quadratum 36. aufer ex 100. quadrato lateris B C; Reſiduum 64. erit quadratum lateris A C. Radix ergo 64. (nempe 8.) dat pedes lateris A C.

PROPOSITIO XLVIII.

Fig. 76. SI quadratum ab uno trianguli latere (A B) deſcriptum, ſit æquale duobus reliquorum laterum (A C, B C) quadratis; angulus (A C B) quem reliqua latera continent, rectus erit.

Si

Digitized by Google

e1

Fi

Fi

Digitized by Google

Si negas, erit angulus A C B recto major aut minor. Ergo (ut demonſtrabitur prop. 12. & 13. l. 2. quæ ab hac non dependent) quadratum A B non erit æquale quadratis A C, B C, contra hypotheſim.

Vel ſic. Duc F C perpendicularem ad A C, & æqualem C B, & junge A F. Quadratum A F æquale eſt *a* quadratis F C, C A; hoc eſt *b* quadratis B C, C A; hoc eſt per hyp. quadrato A B. Ergo rectæ A F, A B æquales ſunt. Quoniam igitur trigona X, Z, ſunt ſibi mutuo æquilatera, anguli ad C *c* ſunt æquales. Ergo *d* recti. Quod erat demonſtrandum.

a *Per* 47. *l.* 1.
b *Per conſtruct.*
c *Per* 8. *l.* 1.
d *Per def.* 14.

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ

LIBER SECUNDUS.

HIc liber mole parvus; at præſtantiâ ac utilitate theorematum planè magnus. Tyrones; ſcio quod dico, nondum capient, ſed eſſe veriſſimum ulterius provecti, uſu ipſo certiſſimè intelligent.

DEFINITIO.

Fig. 60. l. 1. PArallelogrammum rectangulum (AE) (quod rectangulum ſimpliciter ſine ullo addito appellari ſolet) contineri dicitur ſub duabus lineis rectis (A C, A F) rectum angulum comprehendentibus.

Nam earum altera A C altitudinem rectanguli, altera A F latitudinem determinat. Deinde ſi intelligatur latus A C ferri perpendiculariter per totam A F, aut A F per totam A C. producetur eo motu area rectanguli. Quare merito rectangulum fieri dicitur ex ductu, ſeu multiplicatione duorum laterum contiguorum.

Fig. 2. lib. 2. *Quando igitur dicitur ex. gr. rectangulum ſub (vel ex) A C, C B, vel brevitatis cauſa, rectangulum A C B, deſignatur rectangulum quod continetur*

tinetur ſub A C, & C B ad rectum angulum conſtitutis. Similiter, cum dicitur rectangulum ſub A B, C B, vel rectangulum A B C, deſignatur rectangulum contentum ſub rectis A B, & B C rectum angulum comprehendentibus. Fig. ead.

Rectangulum porro aliud eſt oblongum, aliud quadratum. Oblongum eſt quod latera contigua habet inæqualia, ſive quod continetur ſub duabus rectis inæqualibus. Quadratum rectangulum eſt, quod ſub duabus æqualibus continetur.

NOTA.

Signum æqualitatis in hoc libro eſt. Æ.

PROPOSITIO PRIMA.

SI fuerint duæ (A B, A C) quarum altera ſecta ſit in quotcunque partes (A E, E F, F C) erit rectangulum ſub illis duabus (A B, A C) comprehenſum, æquale rectangulis, quæ ſub inſecta (A B) & ſingulis ſectæ partibus (A E, E F, F C) continentur. Fig. 1. lib. 2

Statue A B perpendicularem ad A C, per B duc infinitã B R perpendicularẽ ad A B. Ex E, F, C erige perpendiculares E I, F L, C Q. Erit B C rectangulum ſub AB: & AC, & eſt æquale rectangulis B E, I F, L C, hoc eſt (quia tam I E, quàm L F ſunt a æquales a Per 29. & 34. l. 1.

les A B) rectangulis ſub A B, A E, ſub A B, E F, ſub A B, F C.

Scholium.

Decem prima hujus libri theoremata etiam vera ſunt in numeris, ſi ut lineæ dividantur in partes. Rectangula numerica procreantur ex multiplicatione duorum numerorum, quadrata vero numerica ex multiplicatione numeri per ſe ipſum.

PROPOSITIO II.

Fig. 2. *SI recta (AB) ſecta ſit utcunque (in C) duo rectangula, ſub tota (A B) & partibus (A C, C B) comprehenſa, quadrato totius æqualia ſunt.*

Accipiatur F æqualis A B.

b Per 1. l. 2. Rect. F A B. Æ. b rect. F A C } rect. F C B }

hoc eſt, quia F & A B ſunt æquales inter ſe

Quad. ex A B. Æ. rect. B A C } rect. A B C }

PROPOSITIO III.

Fig. 3. *SIt recta (A B) utcunq; ſecta (in C) erit rectangulum ſub tota (A B) & partium alterutrâ (B C) comprehenſum, æquale rectangulo ſub partibus: A C,*

(*A C, C B una cum quadrato prædictæ partis* (*B C.*)

Aſſume F æqualem C B.

Rect. A B F. Æ d rect. A C F } rect. C B F } d *Per 1, l. 2.*

hoc eſt, quia æquales ſunt C B & F.

Rect. A B C. Æ. rect. A C B. } quad. C B. }

PROPOSITIO IV.

Sit recta (*F L*) *utcunque ſecta* (*in O:*) *erit quadratum totius æquale quadratis partium* (*F O, O L*) & *bis rectangulo ſub partibus* (*F O, O L*) *contento.* *Fig. 4.*

Quad. F L. Æ. e rect. F L O cum rect. L F O e *Per 2. l. 2.*

Atqui rect. F L O. Æ. f rect. F O L } quad. O L } f *Per 3. l. 2.*

& rect. L F O. Æ rect. L O F } quad. F O }

Ergo quad. F L. Æ g rect. F O L } quad. O L } rect. F O L } quad. F O } g *Per eand.*

Id eſt quad. F L. Æ. rect. F O L bis } quad. O L } quad. F O. }

PRO-

PROPOSITIO V.

Fig. 5. *SIrecta (QX) ſecta fuerit æqualiter (in R) & inæqualiter (in S;) erit rectangulum ſub inæqualibus partibus (QS, SX) contentum, unà cum quadrato partis intermediæ (RS) æquale quadrato dimidiæ (QR.)*

Rect.QSX b Æ. rect. QR,SX
rect. RSX

b Per 1 l. 2. Atqui ob æqualitatem rectarum QR,RX
Rect.QR,SX Æ. rect. RXS,
id eſt
c Per 3. l.2. Æ. c rect. RSX
quad. SX

Ergo rect.QSX. Æ. rect. RSX
quad. SX
rect.RSX

Addatur utriſque quad. RS. habebitur
rect. QSX rect.RSX id eſt
e Per. 4.l.2. quad. RS Æ. quad. SX æquad.RX
rect. RSX ſeu QR
quad. RS

PROPOSITIO VI.

Fig. 6. *SIrecta (AB) ſit bifariam ſecta (in C,) eiq; recta quædam adiiciatur (BF:)*
erit

erit rectangulum ſub tota compoſita (AF) & adiecta (BF) contentum, unà cum quadrato dimidiæ (CB) æquale quadrato (CF) compoſitæ ex dimidia & adiecta.

Adde indirectum LA, æqualem adjectæ BF. Cum æqualibus AC, BC, æqualia addantur AL, BF, erunt totæ LC, FC æquales. Unde LF ſecta erit æqualiter in C, & inæqualiter in B.

Ergo { rect. LBF. Æ. d quad. CF / cum quad. CB. } d Per præc.

Sed ob æqualitatem rectarum LB & AF rect. LBF. Æ. rect. AFB.

{ Ergo rect. AFB. Æ. quad. CF / quad. CB.

PROPOSITIO VII.

SI recta (AB) fuerit utcunque ſecta (in C) erunt quadrata totius (AB) & ſegmenti alterutrius (AC) æqualia bis rectangulo contento ſub tota (AB) & ſegmento dicto (AC) unà cum quadrato ſegmenti alterius (CB.) Fig. 7.

Quad. AB, a Æ. rect. BCA bis / quad. AC / quad. BC. } a Per 4. L. 2.

Adde

Adde vtriſque quad. A C. erunt

{ Quad. A B. Æ. rect. B C A bis }
{ quad. A C quad. A C bis }
{ quad. B C }

Atqui rect. B C A bis cum quadrato A C bis, æquatur [b] rectangulo B A C bis. Quare ſi pro B C A bis & quad. A C bis ſubſtituamus B A C bis; erit

b Per 3. l. 2.

{ Quad. A B. Æ. rect. B A C bis }
{ quad. A C quad. B C }

PROPOSITIO VIII.

Fig. 8.

SI recta (L F) fuerit ſecta bifariam (in I) eiq; quadam recta adijciatur (F O) erit rectangulum (L I O) quod ſub (L I) dimidia, & (I O) compoſita ex dimidia & adiecta continetur, quater ſumtum, unà cum quadrato adiectæ (F O) æquale quadrato totius compoſitæ (L O.)

a Per prac.

{ Quad. I O. [a] Æ. rect. O I F bis }
{ quad. I F quad. F O }

hoc eſt, quia ex hyp. F I, L I, ſunt æquales, ac proinde quad. F I eſt quad. L I, & rect. O I F eſt rect. O I L, ſeu L I O

{ quad. I O. Æ rect. L I O bis }
{ quad. L I quad. F O }

Quare ſi vtriſque æqualibus addas rect. L I O bis. Erit

quad.

{ quad. I O
quad. L I
rect. L I O bis.
id eſt.

b quad. L O. Æ. rect. L I O bis } b*Per* 4. *l.* 2.
quad. F O
rect. L I O bis
Id eſt
Æ. rect. L I O quater }
& quad. F O

PROPOSITIO IX.

Si recta (AC) ſit diviſa bifariam (in B) & non bifariam (in F:) erunt quadrata partium inæqualium (A F, F C) dupla quadratorum dimidiæ (A B) & partis intermediæ (B F.) Fig. 9.

quad. A F. Æ. *a* rect. A B F bis } a*Per* 4. *l.* 2
quad. A B
quad. B F

Addito igitur utriſque quad. F C,

{ quad. A F. Æ. rect. A B F bis
quad. F C quad. A B }
quad. B F
quad. F C

Sed rect. C B F eſt rect. A BF, quia A B. B C ſunt æquales ex hyp.

Ergo

Ergo { quad. A F. Æ. rect. C B F bis
{ quad. F C quad. A B
quad. B F
quad. F C }

b Per. 7. l. 2. Atqui b C B F bis cum quad. F C æquantur quadrata B C, B F, ſeu A B, B F: quare ſi hæc illis ſubſtituas, erunt

{ quad. A F. Æ. quad A B
{ quad. F C quad. A B
quad. B F
quad. B F }

Id eſt

quad. A B } bis
quad. B F }

PROPOSITIO X.

Fig. 10. *SI recta (F I) ſit biſecta (in L) eique quædam recta adjiciatur (I O:) erunt quadrata totius compoſitæ (F O) & adjecta (I O) dupla quadratorum quæ deſcribuntur ſuper dimidiâ (F L) & ſuper (L O) compoſitâ ex dimidia & adiecta.*

Adjiciatur in directum Q F, æqualis I O. Quia ergo etiam F L, I L æquantur ex hyp. erunt totæ Q L, O L æquales, ac proinde Q O biſecta eſt in L, & aliter in I. Ergo

a Per præc. { quad. Q I. Æ a quad. Q L } bis
{ quad. I O quad. L I }

Sed

Sed quad. QI eſt quad. FO, & quad. QL eſt quad. LO, & quad LI eſt quad. FL

Ergo {quad. FO. Æ quad. FL} bis
{quad. IO quad. LO}

PROPOSITIO XI.

Datam rectam (AB) ita ſecare (in C) ut rectangulum (ABC) ſub totâ & unâ parte contentum, æquale ſit quadrato partis reliquæ (AC.) Fig. 11.

Ex A erige perpendicularem AF parem AB. AF biſeca in X. Duc rectam XB; cui ex FA producta æqualem abſcinde XI. Tum abſcinde AC æqualem AI. Dico factum.

Perficiatur quadratum BAFS, & ductâ per C perpendiculari, perficiatur quoque rectangulum FILO. Quoniam FA biſecta eſt in X, eique adjecta eſt AI, erit

{rect. FIA. Æ. d quad. XI. d Per 6. l. 2.
{quad. XA

id eſt

Æ. e quad. XB e Per conſtr.

Id eſt

Æ. f quad. BA} f Per 47. l. 1.
quad. XA}

Auferatur utrimque quad. XA. Erit rect. FIA ſeu FL. Æ. quad. BA; id eſt AS

Quare ablato rurſum communi A O
Erit A L. æ. C S

Atqui A L. eſt quadratum A C, cum A I, A C ex conſtr. ſint æquales: & C S eſt rect. A B C cum B S ſit par A B. Ergo rectang. A B C æquatur quadrato A C. Datam igitur rectam ſecuimus, ut petebatur.

Scholium.

P*Ropoſitiones* 10. *primæ huius libri veræ ſunt, etiam in numeris. Hæc* 11. *numeris explicari non poteſt. Neque enim vllus numerus ita ſecari poteſt, vt productum ex toto in partem vnam, æquale ſit quadrato partis reliquæ. Porro mira vis eſt huius ſectionis, de qua vide prop.* 30. *l.* 6.

PROPOSITIO XII.

Fig. 12. I*N trigono obtuſangulo* (*A C B*) *quadratum lateris* (*A B*) *obtuſo angulo oppoſiti, quadrata laterum reliquorum* (*A C, B C*) *excedit rectangulo* (*B C F*) *bis, quod comprehenditur ſub* (*B C*) *latere alterutro obtuſum angulum* (*A C B*) *continentium, in quod, cum protractum fuerit, cadit perpendicularis* (*A F;*) *& ſub* (*F C*) *interceptâ exteriùs latera inter perpendicularem & obtuſum angulum.*

Quad.

Quad. A B. Æ. a quad. A F } quad. B F } a Per 47. hu.

Sed quad. B F eſt b æquale quadratis F C, C B, & rect. B C F bis. Ergo ſi hæc ſubſtituas pro quad. B F; erit b Per 4. l. 2.

Quad. A B. Æ. quad. A F, quad. F C, quad. C B, rect. B C F bis

Atqui quadrata A F, F C æquantur quadrato c A C. Quare hoc pro illis ſubſtituto, erit c Per 47. hu.

Quad. A B. Æ. quad. A C, quad. C B, rect. B C F bis

PROPOSITIO XIII.

IN triangulo quocunque (A C B) quadratum lateris (A B) acuto angulo (C) oppoſiti, à quadratis laterum reliquorum (A C, B C) exceditur rectangulo (B C F) bis, quod continetur ſub (B C) latere alterutro acutum angulum (C) comprehendentium, in quod cadit perpendicularis (A F) ab oppoſito (A;) & ſub (C F) intercepta inter perpendicularem (A F) & acutum angulum (C.) Fig. 13. 14.

a Per 4. l. 2. Quad. B C. Æ. *a* rect. B F C bis, quad. B F, quad. F C

b Per 47. l. 1. Et quad. A C. *b* Æ. quad. F C, quad. A F.

Quare duo ſimul { quad. B C. Æ. rect. B F C bis, quad. A C. } quad. B F, quad. F C bis, quad. A F.

c Per 3 l. 2. Atqui rectang. B F C bis cum quad. F C bis æquatur *c* rectangulo B C F bis. Ergo hoc pro illis ſubſtituto

{ Quad. B C. quad. A C } Æ. rect. B C F bis, quad. B F, quad. A F.

d Per 47. l. 1. Atqui quadrata A F; B F, ſunt *d* quad. A B. Ergo hoc pro illis ſubſtituto

{ Quad. B C. quad. A C } Æ. rect. B C F bis, quad. A B

Hoc eſt, B C, A C quadrata, excedunt quad. A B rectangulo B C F bis.

Corollarium.

Fig. 15. Vera eſt propoſitio licet perpendicularis cadat extra triangulum. Demonſtratio fere eadem eſt.

Scholium.

Ex hac & 47. lib. 1. habetur dimenſio cujuſcunque trianguli, cujus tria latera ſint nota, licet

licet aream habeat inperviam. Horum quippe theorematum beneficio innoteſcit perpendicularis, etiamſi eam impedimenta loci non ſinant deſignari. Perpendicularis autem multiplicata per ſemiſſem lateris, cui incidit, producit aream trianguli, ut patet ex ſcholio propoſ. 41. l. 1.

Eſto trigonum quodcunque A C B notâ habens latera. Oporteat notam reddere perpendicularem A F ex dato angulo A in latus oppoſitum B C. Fig. 13. vel 14.

Quadratum lateris A B acuto C oppoſiti, aufer ex ſummâ quadratorum A C, C B. Per 13. reſiduum erit rectangulum B C F bis. Reſidui ſemiſſem (hoc eſt rectangulum BCF) divide per notum latus B C. Proveniet recta C F. Quadratum rectæ C F aufer ex quadrato A C. Reſiduum dabit quadratum b *A F, cujus radix quadrata dabit perpendicularem A F.*

b *Per Prob. 2 ſchol. poſt 47. l. 1.*

Obtinere id ipſum poteris etiam ex p. 12. Verum 13. ſufficit, cum in omni triangulo perpendicularis ex aliquo angulo in latus oppoſitum, intra triangulum cadat.

PROPOSITIO XVI.

D*Ato rectilineo (Q X Z) æquale quadratum conſtruere.* Fig. 16.

Rectilineo Q X Z fac æquale *a* parallelogrammum rectang. C I, cujus latera I A, C A, ſi æqualia fuerint, ipſum erit quadratum, quod petitur: ſi inæqualia ſunt, latus majus I A produc in L, donec A L ſit par

a Per 45. l. 1.

A C.I L biſeca in Z; quo centro per I & L deſcribe circulum, & producatur C A, donec circumferentiæ occurrat in B. Quadratum rectæ A B æquale eſt dato Q X Z.

Ducatur enim recta Z B. Quoniam I L, ſecta eſt bifariam in Z, & aliter in A: erit

a Per 5. l. 2. { rect. I A L. æ. *a* quad. Z L: hoc eſt
{ quad. Z A.

b Per conſtr. æ. *b* quad. Z B: hoc eſt

c Per 47. l. 1 æ. *c* quad. Z A }
quad. B A }

Ablato igitur utrimque quadrato Z A, communi, remanet

rect. I A L. æ quad. B A:

hoc eſt, quia A C, A L ſunt æquales, erit

rect. C I. æ. quad. A B

d Per conſtr. Id eſt *d* rectil. Q X Z.

Scholium.

Conſtructio Euclidæa requirit, ut per 45. l. 1. rectilineum reducatur ad rectangulum. Quæ reductio cum ſatis operoſa ſit, fortaſſe expeditius problema abſolvetur hunc in modum.

Rectilineum datum reſolvatur in tot quadrangula (Z, X) quot poteſt. Tum ſingulis quadrangulis fac e rectangula æqualia. Si tunc ſupereſit (ut hic contingit) unum triangulum (Q,) illi quoque fac f æquale rectangulum, ſingulis deinde rectangulis per hanc 14 fac quadrata æqualia: ac demum his omnibus quadratis unum æquale g fiat. Erit hoc æquale dato Q X Z.

e Per ſchol. p. 45. l. 1.
f Per coroll. p. 42. l. 1.
g Per prob. 1 ſchol. p. 47. l. 1.

ELE-

ELEMENTORUM
GEOMETRIÆ
LIBER TERTIUS.

Perfectiſſimæ inter planas figuræ proprietates fundamentales hoc libro demonſtrantur. Libri utilitas vel hoc ſolo innoteſcit, quod tractet de circulo rerum admirabilium per Matheſim univerſam fonte uberrimo. Theoremata illuſtriora ſunt 16. 20. 21. 22. 31. 32. 35. 36.

DEFINITIONES.

1. Circuli æquales ſunt, quorum diametri ſeu ſemidiametri ſunt æquales.

2. Recta (F B) circulum tangere dicitur, quæ circulo ſic occurrit (in B) ut tamen producta circulum non ſecet. *Fig.* 20. *l.* 3.

3. Circuli tangere ſe dicuntur, cum ſibi ſic occurrunt, ut tamen non ſecent. *Fig.* 13. & 14.

4. In circulo æqualiter à centro (A) diſtare dicuntur rectæ (B C, F L) cum perpendiculares (A I, A O) quæ ex centro in ipſas ducuntur, ſunt æquales. *Fig.* 18.

5. Segmenta, ſeu portiones circuli ſunt *Fig.* 37.

partes, in quas circulum dividit recta (CE) circulum ſecans.

Fig. 33. 6. Angulus in ſegmento eſt (BQ) qui continetur ſub rectis lineis, quæ ad unum circumferentiæ punctum (Q) ex ſegmenti terminis (C, B) ducuntur.

Fig. 33. 7. Angulus (CQB) inſiſtere dicitur peripheriæ (BOC) quæ illi opponitur.

Fig. 11. 8. Sector eſt pars circuli à duobus ſemidiametris (AB, AF) & arcu (BF vel BCF) quem ſemidiametri intercipiunt, comprehenſa.

PROPOSITIO PRIMA.

Fig. 1. lib. 3. *Dati circuli centrum invenire.* Ducatur in circulo recta BC utcunque, quam biſeca in Q. Per Q duc perpendicularem LF. Hanc biſeca in A. Erit A centrum.

Si negas; centrum eſto O extra rectam FL (nam in FL eſſe non poterit, cum ubilibet extra A dividatur inæqualiter) ducanturque BO, QO, CO. Quoniam igitur vis O centrum eſſe, erunt BO, CO æquales. Triangula igitur BOQ, COQ ſibi mutuo æquilatera ſunt, cum etiam ex conſtr. BQ, & QC, ſint pares, & QO communis. Ergo *a* angulus OQC æquatur angulo OQB. Ergo OQC *b* rectus eſt, ac proinde angulo LQC per conſtr. recto æquatur, pars toti. Quod eſt abſurdum.

a Per 8. l. 1.

b Per defin. 14. l. 1.

Corol-

Corollarium.

EX demonſtratis patet,ſi in circulo recta (L F)aliam (B C) biſariam & perpendiculariter ſecat,in ſecante eſſe centrum.

Facillimè per normam invenitur centrum; vertice Q ad circumferentiam applicato. Si enim recta D E jungentem puncta, D & E, in quibus normæ latera peripheriam ſecant, biſecetur in A, erit A centrum. Demonſtratio pendet ex 31. hujus. Fig. 2.

PROPOSITIO II.

SI in circuli ambitu duo puncta ſumantur (B, C;) recta, quæ per illa ducitur; intra circulum cadit. Fig 2.

Accipiatur in recta B C quodvis punctum O, & ex centro A ducantur A O. A B, A C. Quoniam A B, A C æquantur, etiam *a* anguli B & C æquales erunt. Quoniam igitur externus A O C *b* major eſt interno B, major erit quoque quam C. In triangulo igitur O A C, latus A C ſubtendens majorem angulum A O C, majus eſt *c* latere A O ſubtendente minorem C. Cum igitur A C tantum pertingat ex centro ad circumferentiam, A O non pertinget. Ergo punctum O intra circulum cadet. Idem oſtendetur de quovis alio puncto rectæ BC. Tota ergo B C cadit intra circulum.

a *Per 5. l. 1.*
b *Per corol. 1. p. 32. l. 1.*
c *Per 19. l. 1.*

Ex

Ex ipſa etiam notione lineæ rectæ, & circularis, propoſitio eſt manifeſta.

PROPOSITIO III.

Fig. 3. *SI in circulo recta per centrum ducta (BL) aliam (CF) non per centrum ductam ſecet bifariam; ſecabit quoque perpendiculariter. Et ſi ſecet perpendiculariter, ſecabit bifariam.*

1. Pars. Ex A centro ducantur AC, AF. Triangula X, Z ſibi mutuo æquilatera ſunt, nam CO, FO, ex hypotheſi, & AC, AF, quia ex centro, æquales ſunt: AO verò communis eſt. Ergo *f* anguli AOC, AOF æquales. Ergo *i* recti. Quod erat primum.

f Per 8. *l.* 1.
i Per *defin.* 14. *l.* 1.

2. Pars. Quia ex hyp. anguli AOC, AOF ſunt recti, erit quad. AC *o* æquale quadratis AO, CO; & quad. AF æquale quadratis AO, FO. Cum igitur quadrata AC, AF æqualia ſint, etiam duo ſimul AO, CO duobus ſimul AO, FO æqualia erunt. Quare ablato utrimque communi quadrato AO, remanent CO, FO æqualia. Ac proinde etiam rectæ CO, FO, ſunt æquales. Quod erat alterum.

o Per 47. *l.* 1.

PRO-

PROPOSITIO IV.

SI in circulo duæ rectæ (B C, F L) non amba per centrum ductæ, ſe ſecent, non ſecabunt ſe mutuo bifariam. Fig. 4. & 5.

Nam ſi una L F tranſeat per centrum, patet hanc non biſecari ab altera B C, quæ ex hyp. per centrum A non tranſit. Fig. 5.

Si neutra per centrum tranſit, ex A centro duc A O. Si jam ambæ B C, F L forent biſectæ in O, anguli quoque AOC, AOL eſſent *a* recti, ac proinde æquales, totum & pars quod fieri non poteſt. Fig. 4. a Per præc.

PROPOSITIO V. & VI.

CIrculi ſe mutuo ſecantes, aut interius tangentes non habent idem centrum. Fig. 6. & 7.

Alias enim ductis ex communi centro A rectis A B, A CF, eſſent A C, A F, (pars & totum) æquales, quia ambæ ſunt æquales eidem A B.

PROPOSITIO VII.

SI in circulo quodvis aliud à centro (A) accipiatur punctum (C) ex quo rectæ Fig. 8.

plu-

plures C B, C L, C O, C F) in circumferentiam cadant.

1. *Maxima erit (C B) quæ per centrum tranſit.*

2. *Reliqua diametri pars (C F) minima.*

3. *Aliarum verò major eſt ea, quæ maximæ (C B) propior.*

4. *Neque plures quam duæ ex dicto puncto (C,) quod à centro diverſum eſt, ad circumferentiam duci poſſunt æquales.*

Pars 1. Ducatur ex A centro recta A L. Quoniam A L, A B æquales ſunt, addita communi A C, erunt L A cum A C, & BC æquales. Sed L A, A C ſunt majores *b* quam
b Per 20. l. 1 LC. Ergo etiam BC major, quam LC. Eodem modo B C oſtendetur major quavis aliâ.

b Per eand. Pars 2. Ex centro duc AO rectam. AO, (hoc eſt AF) eſt minor *b* quàm A C, C O. Ablatâ igitur communi A C, remanet F C minor quam C O. Eodem modo erit C F minor, quavis aliâ.

Pars 3. In triangulis C O A, CLA latera L A, A C æquantur lateribus O A, AC. Angulus vero L A C major eſt angulo
c Per 24. l. 1 O A C. Ergo *c* baſis LC, major baſi O C.

Pars 4. Patet ex præcedentibus. Nam ſi tres duci poſſent æquales, C O, C I, C Q, forent

forent duæ CQ, CI ad eandem partem inter ſe æquales. Quod repugnat parti 3.

PROPOSITIO VIII.

SI à puncto extra circulum accepto (A) ad circulum ducantur plures rectæ (AB, AC, AF) (AO, AQ, AR.) Fig. 9. & 10.

1. *Earum quæ in cavam peripheriam incidunt, maxima eſt (AB) tranſiens per centrum (Z.)*

2. *Aliarum major eſt ea, quæ maximæ (AB) propior.*

3. *Extra circulum minima eſt (AO) quæ producta per centrum tranſit.*

4. *Quæ minimæ propior, minor eſt remotiore.*

5. *Non plures quam duæ ex dicto puncto (A) in peripheriam duci poſſunt æquales, ſive intra circulum, ſive extra.*

Pars 1. ex centro Z, duc ZC. Quia æquantur ZC, ZB; additâ communi AZ, erunt AZ, ZC ipſi AB æquales. Sed AZ, ZC majores ſunt *a* quam AC. Ergo etiam AB major AC. Eodem modo erit AB major quavis aliâ. Fig. 9. a Per 20 l. 1.

Pars 2. Duc ZF. Latera CZ, ZA æquantur lateribus FZ, ZA. Angulus vero

CZA

b Per 24.l.1. CZA major eſt angulo FZA. Ergo *b* baſis CA major baſi FA.

Fig. 10.

c Per 20.l.1 Pars 3. Duc ZQ. Duæ AQ, QZ majores ſunt *c* quàm AZ. Ablatis igitur æqualibus ZQ, ZO remanet AO minor quàm AQ. Eodem modo AO minor erit quavis aliâ.

d Per 21.l.1. Pars 4. Duc ZR. Rectæ AQ & QZ, minores ſunt *d* quam AR, RZ. Ablatis ergo æqualibus ZQ, ZR, remanet AQ minor quam AR.

Pars 5. patet ex quatuor præced.

PROPOSITIO IX.

Fig. 11. *SI ab aliquo intra circulum puncto A, plures quàm duæ æquales ad ambitum duci poſſint; Id punctum centrum erit.*

Patet ex 4. parte prop. 7.

PROPOSITIO X.

Fig. 12. *CIrculi in duobus tantum punctis ſe mutuo ſecant.*

Secent enim ſi fieri poteſt in pluribus B, C, F. Ex A centro circuli LQ ducantur ad B, C, F, rectæ AB, AC, AF. Erunt hæ æquales. Quoniam ergo ex aliquo intra circulum OS puncto A ductæ ſunt tres æquales ad ejus peripheriam, AB, AC, AF, erit

f Per præc. A *f* centrum quoque circuli OS. Ergo circuli LQ & OS ſe ſecantes habent idem centrum, quod repugnat propoſitioni 5.

PRO-

PROPOSITIO XI.

SI duo circuli ſe intus tangant, recta per eorum centra (A, & I) ducta, tranſibit per contactum (B.) Fig. 13.

Si negas, habeant, ſi fieri poteſt, centra eum ſitum, ut recta per illa tranſiens, cadat extra contactum B, ſecans circulos in O, & L, ſintque centra ipſa A, & C; ac iunge AB, CB. Quoniam igitur C B, C O, æquantur, additâ communi A C, etiam A C, C B, æquales erunt A O. Sed *b* A C, C B ſunt majores quàm A B; Hoc eſt *c* quam A L. Ergo etiam A O maior eſt quàm A L pars toto, Qnod eſt abſurdum.

b *Per 20. l. 1.*
c *Per defin. circuli.*

PROPOSITIO XII.

SI circuli ſe tangant exterius, recta coniungens centra, per contactum tranſibit. Fig. 14.

Si negas, ſint ſi fieri poteſt centra ita poſita, puta in A & B, ut recta per ipſa tranſiens, per contactum S non incedat, ſed circulos ſecet in O, & Q. iunganturque A S, B S. Erunt igitur *a* A S, S B maiores quàm A B. Sed A S *b* eſt par A O, & B S par B Q. Ergo etiam A O, B Q ſunt maiores quàm tota A B, pars toto. Quod fieri non poteſt.

a *Per 20 l. 1.*
b *Per defin. circuli.*

PRO-

PROPOSITIO XIII.

Fig. 15. CIrculi & ſeſe mutuo, & lineam rectam punctualiter tangunt.

Tangant enim ſe intra(ſi fieri poteſt)duo circuli in parte circumferentiæ C L. Per
b Per 11. l. 3. centra A, & B ducta recta *b* tranſibit per contactum puta in C. Ducantur inſuper
c Quia ex centro. A L, B L. Quoniam igitur *c* B L, B C æquantur (ſunt enim ex centro B ad peripheriam O L C,) addita communi A B, erunt A B, B L æquales A C. Sed A C eſt par A L, (ſunt enim ex centro A ad peripheriam Q L C.) Ergo etiam A B, B L ſunt æquales A L, contra 20. l. 1.

Fig. 16. Tangant ſe deinde exterius duo circuli, ſi fieri poteſt, in arcu O L. Recta A P cen-
d Per 12. l. 3. tra A &, P jungens *d* tranſibit per contactum, puta in O. Ducantur inſuper A L, P L. Erunt igitur duo trianguli latera A L, P L æqualia ipſis, A O, P O, ſeu toti A P. Contra 20. l. 1.

Fig. 16. Deniq; recta B F & circulus ſe tangant, ſi fieri poteſt, in parte aliqua C E. Ducantur ad centrum rectæ C A, E A. Erunt igitur C A. E A æquales, ac proinde triangulum C A E eſt iſoſceles. Quare *e* anguli A C E,
e Per coroll. 11. p. 32. l. 1. A E C acuti. Ergo perpendicularis ad B F,
f Per coroll. 8. p. 32. l. 1. ducta ex A centro, cadet inter *f* C & E, puta in D.

Erunt

Erunt igitur tam A C, quam A E æquales perpendiculari A D; quod eſt abſurdum contra Coroll. 14. p. 32. l. 1.

Corollarium.

CIrculi qui habent centra in una recta, eamque ſecant in eodem puncto B, ſe mutuo in puncto illo B, contingunt. Fig. 17.

Cæterum hæc propoſitio liquet etiam ex notione ipſa linearum, quæ comparantur. Neque enim aut recta linea & curva circuli peripheria, aut peripheriarum inæqualium diverſæ curvaturæ, aut duæ connexæ, ſecundum ullam ſui partem poſſunt congruere. Congruerent autem ſi invicem in tota parte aliquâ tangerent.

PROPOSITIO XIV.

IN circulo æquales rectæ (B C, L F) æqualiter à centro diſtant: & quæ diſtant à centro æqualiter, ſunt æquales. Fig. 18.

Ex centro A ducantur A C, A F, item A O, A I ad angulos rectos ipſis B C, F L. Erunt *a* B C, F L biſectæ in O & I. a Pr. 3. l. 3.

Cum ergo totæ B C, F L ponantur æquales, etiam dimidiæ O C, I F, adeoque & quadrata ipſarum æquantur. Jam vero quad. A C *b* æquale eſt quadratis O C. O A: & quadratum A F æquatur quadratis I F, I A. b Per 47. l. 1.

F Cum

Cum igitur quadrata A C, A F æqualia ſint etiam duo quadrata O C, O A, duobus I F, I A æqualia erunt. Ablatis igitur quadratis O C, I F (quæ ante oſtenſa ſunt æqualia) quæ remanent, quad. O A, I A æqualia erunt. Ergo etiam perpendiculares O A, I A ſunt æquales. Ergo B C, F L æquales, à centro diſtant *c* æqualiter. Quod erat primum.

c Per defin. 4. l. 3.

E converſo ſi diſtantiæ O A, I A ponantur æquales, tunc ablatis quadratis rectarum æqualium O A, I A. Eodem diſcurſu oſtendetur quadrata reliqua O C, I F fore æqualia, ac proinde & rectas O C, I F æquales eſſe, quæ cum ſint *d* ſemiſſes rectarum B C, F L, etiam illæ æquales erunt. Quod erat alterum.

d Per 3. l. 3.

PROPOSITIO XV.

Fig. 19.

R*Ectarum circulo inſcriptarum maxima eſt diameter. Cæterarum ea major, quæ centro propior.*

Sit quævis R S alia à diametro F L. Ex centro duc A R, A S. Duæ A R, A S, æquantur diametro F L, & ſunt *a* majores quam R S. Ergo &c.

a Per 20. l. 1

Sit deinde BI propior centro quam XZ. Ex centro ad illas duc perpendiculares AC,

AQ,

AQ. Erit AQ *b* maior quam AC. Accipe ergo AO parem AC, & per O duc RS perpendicularem ad AO, quæ *c* par erit BI; junganturque AR, AS, AX, AZ. Quia igitur A centrum eſt, erunt latera AR, AS æqualia lateribus AX, AZ. Angulus autem RAS, maior eſt angulo XAZ. Ergo baſis RS hoc eſt BI, maior *d* eſt baſi XZ. Quod erat demonſtrandum.

b *Per defin. 4. l. 3.*
c *Per præc.*
d *Per 24. l. 1*

PROPOSITIO XVI.

Fig. 20.

R*Ecta (IF) quæ per (B) extremitatem diametri (CB) perpendicularis eſt, tota cadit extra circulum, eumque tangit (in B.) Neque inter ipſam & circulum alia recta ad contactum (B) duci poteſt, quin circulum ſecet.*

Pars 1. Accipiatur in recta IBF quodvis punctum L, ad quod ex centro A duc rectam AL. In trigono LAB quoniam angulus ABL rectus eſt per hyp. erit ALB *a* acutus. Ergo AL oppoſita maiori angulo ABL, maior eſt, *b* quàm AB, quæ minori ALB opponitur. Sed AB tantùm pertingit ad circumferentiam. Ergo AL ultra circumferentiam porrigitur, ac proinde punctum L, extra circulum eſt. Tota igitur IF extra circulum cadit. Quod erat primum.

a *Per coroll. 5. p. 32. l. 1.*
b *Per 19 l. 1.*

Pars 2. Infra B F (ſi fieri poteſt) cadat R B tota extra circulum. Quoniam F B A rectus eſt per hyp. erit R B A acutus, ac proinde A B non eſt perpendicularis ad B R. Ducatur igitur ex A centro ad B R perpendicularis A O, quæ cadet *d* verſus R, & ſecabit circulum in Q. Igitur A B oppoſita majori angulo, nempè A O B recto, major eſt quam A O, quæ opponitur minori, nempe acuto O B A. Sed A B par eſt A Q. Ergo etiam A Q major eſt quam A O, pars toto.

b *Per coroll. 3. p. 32, l. 1.*

Corollaria.

Fig. 20. 1. HInc rurſum patet contactum rectæ lineæ & circularis eſſe punctualem.

Fig. 17. 2. Si centris in eadem lineâ rectâ in infinitum protractâ acceptis deſcribantur per B infiniti circuli tam minores primo BSC, quam majores; omnes tangent rectam I F in eodem uno puncto B.

3. Circuli igitur in amplitudinem quâcunque datâ majorem excreſcentes, propius ſemper ac propiùs in infinitum tangenti appropinquant, nunquam tamen ei præterquam in unico contactus puncto, conjunguntur: quod quamvis evidentiſſimum ſit, eſt tamen revera admirabile.

Fig. 17. 4. Ex his manifeſtum eſt, lineam quamcunque in infinitum eſſe diviſibilem. Ducatur

catur enim ab aliquo diametri puncto ad tangentem recta A Q. Infiniti circuli centra habentes in rectâ BA ſine termino productâ rectam I F, per coroll.2. hic, & ſe mutuo per coroll.p. 13.tangunt in uno eodemque puncto, B, ac proinde nuſquam vel inter ſe, vel cum recta I F, conjunguntur, præterquam in B. Ergo neceſſe eſt ut rectam A Q dirimant in partes infinitas, hoc eſt in non tot, quin plures.

5. Angulum contingentiæ ſeu contactus L B Q (eum nempe qui tangente & peripheriâ continetur) nulla recta linea poteſt dividere. *Fig. 20.*

6. Per circumferentias tamen in eodem puncto tangentes ſecari poteſt ac minui in infinitum. Atque in hoc & tertio corollario latet totum myſterium aſymptoticum, hoc eſt lineæ rectæ ad Hyperbolam unà ſecum in infinitum productam, accedentis ad intervallum quocunque dato minus, nunquam tamen concurrentis: quod præclarè obſervavit & demonſtrauit Marius Bettinus noſter in Apiariis, & ante illum Barocius atque Cardanus ex Rabbi Moyſe Narbonenſi, cujus demonſtrationem refert Cardanus de ſubtilitate lib. 16. *Fig. 17.*

Sckolium.

Demonſtratur & ſolvitur fallacia paradoxorum, quæ ex angulo contactus deduci ſolent.

ATque hæc quidem ex 16. prop. hactenus deducta & mira & certa ſunt. Quæ verò deduci ex eadem ſolent præterea, omnem captum humanæ mentis excedunt. Quare ſuſpicari aliquando cœpi latere hic aliquid, cujus ignoratio ſubtilibus etiam ingeniis illuderet, & paradoxis illis immanibus aſſerendis anſam præberet. Et planè; quod ſuſpicatus ſum, ita ſe habere, mihi tandem videor deprehendiſſe. Paradoxa quæ ex 16 inferri ſolent ex aliis multis, hæc ferè præcipua ſunt.

Fig. 21. 1. *Angulus contingentiæ* (O A C) *omni acuto minor eſt. Acutus eſto* P A C *ab hoc auferri poteſt dimidius, & à reſiduo iterum dimidius, & ſic deinceps ſine termino. Quo pacto acutus fiet quocunque dato minor, quantumvis tamen in infinitum minuatur, ſemper tamen reſidui anguli, ex-*
a Per 16. l. 3. *empli gr. anguli* Q A C, *latus unum* Q A *a intra circulum cadet, ac proinde angulus contactus* O A C *intra acutum continebitur, ejuſque pars erit, ideoque illo minor.*

2. *Angulus ſemicirculi, licet recto minor ſit, eſt omni acuto major. Quia ob eandem cauſam, acutus quantumvis magnus* B A Q, *intra*

intra ſemicirculi angulum B A O *comprehenditur.*

Hæc duo in ipſo textu propoſitionis inferuntur. Quamvis nonnulli dubitent, Euclidis ea ſint, an ab aliquo adjecta. Appollonius cert, magnus geometra, cum eandem affectionem in ellipſi, hyperbola & parabola demonſtrat, has illationes prætermittit.

3. *Angulus rectus* C A B *(imo acutus quicumque* C A Q*) continet infinitos æquales angulos contactus; ac proinde infinities illo eſt major. Nam angulus* C A B *dividi poteſt in acutos infinitos minores ſemper & minores, quorum nihilominus ſinguli ſunt majores* b *angulo contactus* O A C. b *Per paradox,* 1.

4. *Angulus contactus* C A O *eſt vera pars anguli recti* C A B*; eundem quippe una cum ſemicirculo angulo* O A B *conſtituit: nequit tamen ullâ ſui multiplicatione ſuum totum adæquare: ac proinde hic infinita æqualia ſibi addita non efficiunt infinitum.*

5. *Tranſitur à minori ad majus & per omnia media, neque tamen per æquale: ſive datur majus aliquò, & datur eôdem minus, neque tamen datur eidem æquale. Nam ſi recta,* A B, *fixo manente puncto* A, *moveatur, donec congruat cum tangente, deſcribet acutos angulos* B A P, B A Q, *& omnes alios poſſibiles, qui quamvis ſemper augeantur, ſemper tamen erunt minores* c *ſemicirculi angulo* B A O, *quamprimum vero* A B *congruet tangenti* C A, *immediate habetur rectus* C A B *major angulo ſemicirculi.* c *Per paradox.* 2.

Hæc

Hæc & plura alia ex hac 16. propoſitione deduci ſolent: quæ profectò, ſi ita, ut proponuntur ſeſe habeant, merito incomprehenſibilia videri poſſent. Peletarius, ut his paradoxis ſe expediat, negat angulum contactus eſſe quantum. Rem confecerat, ſi dixiſſet nullum angulum eſſe quantum. Sed is vehementer errat, cùm inde infert omnes ſemicirculi angulos eſſe æquales, quod planè non inferret, ſi intelligeret, quod de contactus angulo aſſerverat, omnibus angulis convenire. Neque tamen Clavio noſtro in ſua illa adverſus Peletarium apologetica diſputatione aſſentior. Meâ quidem ſententiâ uterque fallitur, hic dum omnes omnino angulos eſſe putat quantitatem, ille dum omnes, præter angulum contingentiæ. Alii ſe exiſtimant hâc una reſponſione omnes difficultates ſolvere, ſi dicant, curvilineos angulos & rectilineos eſſe incomparabiles. Rogati verò, cur ſint incomparabiles, reſpondent, quia angulus contactus quantumcumque multiplicatus nunquam poteſt æquare rectum vel acutum.

Atqui hoc eſt paradoxum omnium maximum, cujus explicatio petebatur, quî nimirum fieri poſſit, ut angulus contactus anguli recti pars ſit, & tamen quotieſcumque multiplicatus eundem ſuperare nequeat, reſpondent angulum contactus non eſſe partem recti, quia eum non poteſt adæquare. At paradoxorum aſſertores replicant, hinc ſolum ſequi non eſſe partem recti aliquotam: veram tamen eſſe partem, eo quod cum ſemicirculi angulo rectum componat. Vnde qui hac via difficultates propoſitas volebant diſſolvere, debuerant oſtendere angulum contactus nullo ſenſu partem eſſe rectilinei anguli,

anguli. neque addito ſibi ſemicirculi angulo rectum componere: id quod facturi deinceps nos ſumus.

Mihi videtur res omnis ex Euclidæà definitione anguli pendere. Hæc enim, ſi penitiùs expendatur, manifeſtè docet nullum angulum eſſe quantum, quo uno errore ſublato, paradoxa omnia evaneſcunt. Sentio igitur Def. 8.l. 1.

1. *Nullus angulus eſt quantitas, ſed modus quantitatis. Sic enim habet definitio* 8.*l.* 1. *Angulus planus eſt duarum linearum &c. alterius ad alteram inclinatio. Atqui linearum inclinatio non eſt quantitas, ſed modus quantitatis, cum enim curvitas non ſit quantitas, cur inclinatio ſit, quæ ab illa non magis differt, quam inflexio & fractio? Deinde. Si angulus eſſet quantus, foret vel linea, vel ſuperficies, vel corpus. Non eſſe lineam aut corpus patet. Sed neque ſuperficies eſt, ea enim ablatione partium* C, B, *minuitur; non angulus. Neque poteſt dici angulum eſſe ſuperficiem indeterminatam, cum angulus quilibet determinatus ſit.* Fig. 22.

2. *Quoniam anguli non ſunt quantitas, ſed modus quanti, eorum inter ſe comparatorum relatio non eſt æqualitas & inæqualitas, ſed ſimilitudo & diſſimilitudo.*

3. *Cum igitur anguli inter ſe comparati æquales dicuntur aut inæquales, non aliud intelligi poteſt, quàm eos ſimiles eſſe inter ſe aut diſſimiles. Maluit tamen Euclides æquales & inæquales dicere ob multas horum terminorum in angulis rectilineis commoditates. Quem proinde loquendi modum etiam nos retinebimus.*

4. *Similes*

4. *Similes porroanguli ſunt, quorum ambo latera ſuperimpoſita congruunt. Diſſimiles quorum non congruunt latera. Angulus enim nihil eſt aliud, quam inclinatio linearum, alterius ad alteram. Ergo ſimiles anguli ſunt inclinationes linearum ſimiles. Non ſunt autem inclinationes linearum ſimiles, niſi ambæ ſibi mutuo impoſitæ congruant. Ergo ſimiles anguli ſunt, quorum congruunt latera, diſſimiles, quorum non congruunt.*

5. *Itaque manifeſtum eſt nullum angulum curvilineum æqualem dari poſſe ulli angulo rectilineo. Nam æqualitas angulorum non aliud eſt quam ſimilitudo, per concluſ.* 2 & 3. *Similitudo angulorum eſt ſola laterum congruentia per concluſion.* 4. *Laterum congruentia haberi nequit, dum angulus curvilineus imponitur rectilineo. Ergo &c. Errat igitur Proclus dum deſcriptis æqualibus ſemicirculis ita ratiocinatur; æqualium ſemicirculorum anguli E A D, C A B æquales ſunt. Ergo ſi his addatur communis angulus C A D, erit angulus E A C, curvilineus æqualis rectilineo D A B. Fallitne ergo axioma, ſi æqualibus addas, vel demas æ-*
Fig. 23. *qualia, tota, vel reliqua erunt æqualia? Nequaquam: hoc enim ad res quantas ſolùm pertinet, anguli porro quanti non ſunt. Axioma ut in angulis valeat ita formari ac intelligi debet. Similes anguli, ſi opponantur ſimilibus angulis. ſimiliterque poſitis; qui tum orientur, erunt ſimiles. At Proclus comparat angulos ſimiles quidem: ſed communis, qui utriſque additur, cum ab una parte habeat latus rectum: ab altera curvum, diſſimiliter utriſque additur.*

6. *Quare*

6. *Quare cum tota eſſentia anguli ſit linearum ſe tangentium inclinatio, non erit unus angulus pars alterius, una ſiquidem inclinatio pars alterius inclinationis non eſt: neque angulus auferri ab angulo poterit; inclinatio ſiquidem una auferri nequit ab altera; &c. Hæc enim non laterum inclinationibus, quæ quantitas non ſunt, ſed ſuperficiebus inter latera conſtitutis conveniunt.*

7. *Poſtremo ex jam dictis colligemus, quomodo intelligi debeant, illæ locutionum formæ, quibus geometræ paſſim, atque ipſe inprimis Euclides, utuntur, cum angulos ſecari, augeri, imminui, alterum alterius duplum, triplum, aliaque ſimilia aſſerunt. Hæc ſanè exſtimabimus eos non propriè, ſed analogicè tantùm angulis tribuere; itaque eos loqui voluiſſe, quod id commodiùs, & expeditiùs eſſet, neque tamen obnoxium periculo, modo in angulis rectilineis maneatur. Angulum itaque dividi rectâ D A, non aliud erit, quàm inter latera E A,* Fig. 24. *C A aliam interponi lineam, quæ novas duas cum utroque latere inclinationes, hoc eſt duos novos angulos efficiat. Angulum vero E A C eſſe duplum anguli E A D, nihil rurſum aliud erit, quam inter lineas rectas E A, C A, aliam interponi, quæ ad utramque ſimiliter inclinetur, unde fiat ut rectæ E A, D A rectis C A, D A, inclinationibus non mutatis, impoſitæ congruant. Quodſi ita ratiocinentur:* Fig. 24. & *(Angulus E A D eſt æqualis angulo I L Q. & D A C* 25. *eſt æqualis Q L R. Ergo totus E A C toti I L R æqualis eſt. Idem erit, ac ſi dicatur; inclinatio rectarum E A D ſimilis, ſeu eadem eſt inclinationi rectarum I L Q; & inclinatio rectarum D A C*

ſimilis

ſimilis eſt inclinationi rectarum Q L R. Ergo etiam inclinatio rectarum E A C ſimilis erit inclinationi rectarum I L R vel, certe (quod recidet in idem, ex aſſertione 4 ſupra) collectionem illam ſic intellige: latera E A D congruunt lateribus I L Q; & latera D A C congruunt lateribus Q L R. Ergo latera quoque E A C congruent lateribus I L R. Quæ quidem conſecutio æquè clara eſt, atque ſi æqualibus addas æqualia, tota æqualia eſſe; Ad eum modum locutiones cæteras, quæ, cum ſint quantis propriæ, ad angulos transferuntur, facilè, veritate theorematum ubique ſalvâ, interpretabimur.

His ita conſtitutis, facilè paradoxa angularia diſſolvemus; quæ ſanè non aliunde enata ſunt, quam quod angulos eodem, quo cæteras quantitates, habuerint loco: ut igitur ſimul omnia expediam. Dico paradoxa illa, ſi in proprio verborum ſenſu accipiantur, ad unum omnia eſſe falſa. Sic enim accepta non conveniunt niſi quanto: anguli autem quanti non ſunt, ut jam oſtendimus.

Itaque angulus contactus neque minor eſt quovis acuto, neque pars eſt anguli rectilinei, neque in rectilineo continetur infinities, imò ne ſemel quidem: nihil enim horum linearum inclinationi poteſt competere, quæ tota anguli eſſentia eſt. Si verò non propriè, ſed analogicè accipiantur, jam nihil continent, quod à communi ſenſu, ac ratione alienum ſit. Sic enim angulum contactus O A C eſſe minorem quovis acuto, & ſemicirculi angulum Q A B acuto omni majorem, non aliud ſignificabit,

bit, quam infra tangentem C A, nullam poſſe duci rectam ad contactum, quin ſecet peripheriam. Quæ quidem circuli proprietas eſt omnino digna, quam homines admirentur; eſt tamen ejuſmodi quam poſſimus intelligere, & quæ nihil cum ratione pugnans involvat. Non alius paradoxi tertii, quarti & quinti ſenſus erit. Atque ita unius Euclideæ definitionis ductu, ritè perſpectâ naturâ anguli, omnes immanium paradoxorum tenebræ evaneſcunt.

PROPOSITIO XVII.

A Puncto dato (B) rectam ducere, quæ datum circulum (O Q) tangat. Fig. 26.

Ex A dati circuli centro ducatur ad datum punctum B recta A B, ſecans peripheriam in O. Centro A deſcribe per B alium circulum, B S, & ex O duc O C perpendicularem ad A B, quæ occurrat circulo B S in C. Duc C A, occurrentem circulo O Q in I. Ex B ad I ducta recta tanget circulum O Q.

Quia latera B A, I A, æquantur lateribus C A, O A, angulusque A communis eſt in trigonis I A B, O A C, etiam *a* anguli A O C,

A I B *a* Per 4. *l.* 1.

b *Per conſtr.* AIB æquales ſunt, Sed *b* A O C rectus eſt;
c *Per 16. l. 3.* Ergo etiam rectus eſt AIB. Ergo BI *c* tangit in I.

Scholium.

Fig. 27. E *X 31. ſequ. pulchrè ex dato puncto* (O) *ducitur tangens circulum datum* (*B Q*)

Centrum A & datum punctum O jungens recta biſecetur in P. Tum centro P, per A & O deſcribe circulum occurrentem dato in B. Recta O B tanget.

Nam junctâ A B, angulus A B O in ſemicirculo rectus eſt per 31; ergo per 16. O B tangit circulum B Q.

PROPOSITIO XVIII.

Fig. 28. S*I circulum tangat recta linea* (*C L*,) *quæ ex centro* (*A*) *ad contactum* (*B*) *ducitur, tangenti perpendicularis eſt.*

Si negas, ſit ex A centro perpendicularis,
a *Per 1. part. p. 16. l. 3.* alia quædam recta A F: *a* ſecabit ea circulum in O. Quia ergo angulus AFB rectus
b *Per coroll. 5. p. 32. l. 1.* ponitur, erit *b* A B F acutus. Ergo A B,
c *Per 19. l. 1.* (hoc eſt A O) major *c* quam A F, pars toto.

PRO-

PROPOSITIO XIX.

SI recta (B C) circulum tangat. & ex contactu (A) tangenti perpendicularis excitetur (A I) erit in ea centrum. Fig. 29.

Si negas, ſit centrum extra A I in Z,& ab eo ad contactum ducatur Z A, erit *d* angulus Z A C rectus,ac proinde par angulo I A C, per hypoth. recto, hoc eſt pars toti. d *Per prae.*

PROPOSITIO XX.

ANgulus ad centrum (B A C) duplus eſt anguli (B F C) ad peripheriam, cum idem arcus (B C) eſt baſis angulorum. Fig. 30. 31. 32.

Triplex eſt caſus. In primo latera B A, BF coincidunt. Tum vero quia A F, A C ex centro ductæ æquantur, erunt in triangulo Z anguli F,& C *a* æquales.Sed BAC *b* æqualis eſt duobus F & C. Ergo B A C duplus eſt unius F. Fig. 30, a *Per 5. l. 1.* b *Per 32. l. 1.*

In caſu ſecundo B A, C A cadunt intra B F,C F. Tum vero ductâ F A X,per caſum primum X A B eſt duplus X F B, & X A C duplus X F C. Ergo totus B A C duplus eſt totius B F C. Fig. 31.

In tertio caſu B F ſecat A C, & anguli Fig. 32.

B A C.

B A C, B F C ſunt extra invicem. Ducatur F A L per caſum 1. totus L A C duplus eſt totius L F C, & ablatus LAB duplus eſt ablati L F B. Ergo & reliquus B A C duplus eſt reliqui B F C. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXI.

Fig. 33. *ANguli (B Q C, B F C,) qui in circulo, inſiſtunt eidem arcui (B O C,) ſive qui in eodem ſegmento (B Q S C) exiſtunt, inter ſe omnes ſunt æquales.*

Sit primò ſegmentum B QS C majus ſemicirculo. Ex centro A duc A B, A C. Per præced. angulus B A C ad centrum, duplus eſt ſingulorum B QC, B F C. Ergo omnes B Q C, B F C ſunt *a* æquales. Quod erat demonſtrandum.

a Per axio. 6

Fig. 34. Sit deinde ſegmentum B Q C æquale aut minus ſemicirculo. In triangulis B Q I & C F I quia anguli ad verticem I oppoſiti, *b* æquales ſunt, etiam ſumma reliquorum Q & R ſummæ reliquorum F & O *c* æqualis erit. Quare ſi ab his æqualibus ſummis auferantur anguli R & O qui per primam partem æquales ſunt, ut pote eidem arcui QF inſiſtentes, qui remanent Q, F, æquales erunt. Quod erat demonſtrandum.

b Per 15. l. 1.
c Per coroll. 10, p. 32. l. 1.

PRO-

PROPOSITIO XXII.

Quadrilateri circulo inſcripti (A B C F) oppoſiti anguli duos rectos conficiunt. Fig. 35

Ducantur BF, CA. Angulus ABC, cum duobus O & X facit *a* duos rectos. Sed O eſt *b* æqualis I, quia inſiſtunt eidem arcui B C; & X *c* eſt æqualis Z, quia inſiſtunt eidem arcui A B. Ergo A B C, cum duobus etiam, I, Z, hoc eſt cum toto oppoſito angulo A F G, facit duos rectos. Quod erat demonſtrandum.

a *Per 32. l. 1.*
b *Per 21. l. 3.*
c *Per eand.*

PROPOSITIONES XXIII. XXIV.

Non ſunt neceſſariæ: & agitur de ſegmentis ſimilibus, quæ non poſſunt ſine proportionibus rectè definiri.

PROPOSITIO XXV.

Datum arcum (A B C) perficere.

Subtendantur utcunque duæ rectæ A B, C B, quas biſeca in I, & L. Ex I, & L duc perpendiculares ſibi occurrentes in puncto O. Hoc erit centrum circuli, cujus portio eſt arcus A B C. Fig. 36.

G Nam

b Per corol. p. 1. l. 3. Fig. 36.

Nam *b* centrum eſt & in recta IX, & in rectaLZ. Ergo in communi ipſis punctoO.

Praxis. Centro B ſumto in arcu, deſcribe circulum, eodemque intervallo, aliis in arcu centris, deſcribe duos alios circulos quorum ſinguli priorem bis ſecent. Per interſectiones ductæ rectæ ſibi mutuo occurrentes in O dabunt centrum.

PROPOSITIO XXVI. & XXVII.

Fig. 37.

IN circulis æqualibus rectæ æquales (C E, F I) ſubtendunt arcus æquales; & ſi arcus ſunt æquales, etiam ſubtenſa æquales erunt.

1. Pars. Ad centra A & B ducantur C A, E A, F B, I B. Quia triangula C A E, F B I, ſibi mutuo æquilatera ſunt, etiam erunt ſibi mutuo *a* æquiangula. Ergo cum circuli ſibi mutuo imponentur, triangulum F B I congruere poterit triangulo C A E, ac proinde centrum B incidet in centrum A, & puncta F, I, in puncta C, E. Cum igitur circuli ſint æquales, etiam arcus F L I neceſſariò congruet arcui C Q E, & arcus F O I arcui C S E, ac proinde æquales *b* erunt etiam ipſi.

a Per 8. l. 1.

b Per axio. 7.

Per 2. Quoniam circulorum æqualium, arcus F L I, C Q E ponuntur æquales, ſibi mu-

mutuo impoſiti congruent, punctaque F, I incident in puncta C, E. Ergo & ſubtenſa F I congruet ſubtenſæ C E. Ergo F I, C E *d* æquales ſunt. d *Per axio. 7.*

PROPOSITIO XXVIII. & XXIX.

SI in circulis æqualibus anguli ſive ad centra (B A C, F L I) ſive ad ambitum (B O C, F S I) ſint æquales, etiam arcus (B X C, F Z I) quibus inſiſtunt, ſunt æquales: & ſi arcus ſunt æquales, etiam anguli æquales erunt. *Fig. 38.*

Pars 1. Quoniam latera A B, A C, æquantur L F, L I, (ſunt enim æqualium circulorum ſemidiametri) & anguli A, L ponuntur æquales; erunt baſes *a* B C, F I æquales. Ergo arcus B X C, F Z I etiam *b* æquales ſunt. a *Per 4. l. 1.* b *Per præc.*

Ponantur iam anguli B O C, F S I ad ambitum æqnales. Quia igitur *c* horum dupli ſunt B A C, F L I, etiam illi æquales erunt, ac proinde, ut iam oſtenſum, etiam arcus B X C, F Z I ſunt æquales. c *Per 20. l. 3.*

Pars 2. Ex æqualitate arcuum B X C, F Z I habetur per 27. æqualitas ſubtenſarum B C, F I. Ergo, quia etiam B A, A C, æquantur ipſis F L, L I, erunt *e* anguli A & L, ad centrum æquales: & quia *i* anguli O e *Per 8. l. 1.* i *Per 20. l. 3.*

& S horum dimidii ſunt, erunt etiam ipſi æquales.

PROPOSITIO XXX.

Fig. 39. *DAtum arcum (A B C) biſecare.*

Duc A C, quam biſeca in O. Ex O perpendicularem duc O B, occurrentem arcui in B. Dico factum.

Iungantur enim A B, C B. Latera A O, O B per conſtr. æquantur lateribus, C O, O B. & anguli ad O ſunt æquales, quia recti. Ergo baſes A B, B C *a* æquales. Ergo etiam *b* æquantur arcus A B, C B.

a Per 4, l. 1.
b Per 26. l 3.

Fig. 39. *Praxis. Centris A & C deſcribe pari intervallo arcus ſe ſecantes in punctis F, & I, per quæ ducta recta arcum ABC biſecabit.*

PROPOSITIO XXXI.

Fig. 40. *ANgulus (B C F) in ſemicirculo, rectus eſt: in ſegmento majore minor recto; in ſegmento minore recto major.*

1. Pars. Ex centro A duc AC. Quia æquales ſunt A B, A C, anguli O, B, *a* æquales erunt. Ob eandem cauſam æquales erunt I, F. Ergo totus B C F utique B, & F, æqualis eſt. Cum igitur *b* tres ſimul conficiant duos rectos, ſemiſſis trium, angulus B C F, unus rectus eſt.

a Per 5. l. 1.
b Per 32. l. 1.

2. Pars.

Digitized by Google

Digitized by Google

2. Pars. Sit ſegmentum LOBF ſemicirculo L O B majus, in eoque F O L angulus, & ducatur O B. Angulus FOL minor eſt angulo B O L, qui per 1 partem rectus eſt. Ergo. &c. *Fig.* 41.

3. Pars. Eſto ſegmentum L O X ſemicirculo L O B minus, in eoque angulus X O L. Erit hic major quàm B O L, qui rectus eſt. Ergo &c. *Fig.* 41.

PROPOSITIO XXXII.

SI recta (CF) circulum tangat, & alia ex contactu ducta (AB) eundem ſecet, erit angulus à tangente & ſecante factus, par angulo, qui fit in ſegmento alterno. *Fig.* 42. & 43.

Nimirum angulus CAB erit par angulo L, qui fit in ſegmento ALQB, & angulus F A B par angulo O, qui fit in ſegmento A O B.

Tranſeat primò ſecans AB per centrum. Per 18. C A B, rectus eſt. Et per 31. rectus eſt L. Ergo C A B & L æquales ſunt. *Fig.* 42.

Tranſeat deinde ſecans A B non per centrum. Ducatur igitur per centrum recta A Q, & jungatur BQ. Quia A B Q in ſemicirculo rectus eſt, faciet B Q A cum BAQ *a* rectum unum. Sed etiam C AQ rectus *b* eſt. Ergo B Q A, cum B A Q æquatur C A Q. *Fig.* 43. a *Per* 32 *l.* 1. b *Per* 18. *l.* 3.

CAQ.

CAQ. Ablato igitur communi BAQ,
c Per 21. l. 3. erit BQA (hoc *c* eſt L) æqualis CAB. Quod erat primum.

d Per 13. l. 1. Deinde, *d* FAB, CAB, faciunt duos re-
e Per 22. l. 3. ctos; & in quadrilatero BOAL *e* oppoſiti L. & O etiam faciunt duos rectos. Ergo duo FAB, CAB æquantur duobus ſimul O & L. Ablatis ergo hinc quidem CAB, inde L, quos jam oſtendi æquales, erunt æquales reliqui FAB, & O. Quod erat alterum.

PROPOSITIO XXXIII.

Fig. 44. *Super data recta (BC) ſegmentum circuli conſtruere, capiens angulum dato parem.*

Si detur angulus acutus ABF, ex B duc BL perpendicularem ad AB, & ad terminum C datæ rectæ BC, fac angulo CBL,
a Per 23. l. 1. parem *a* BCI, cujus latus ſecabit BL, in I. Centro I, per B, deſcribe circulum, hic tranſibit per C (quia ob æqualitatem angu-
b Per 5. l. 1. lorum ad C & B etiam latera CI, BI *b* æqualia ſunt) capietque ſegmentum BQC angulum parem dato ABF.

Nam quia AB diametro BL perpendicularis eſt, AB tanget *d* circulum, quem
d Per 18. l. 3. ſecat BC. Ergo *e* angulus in ſegmento
e Per prae. BQC, æquatur angulo ABF.

Quod

Quod ſi detur angulus obtuſus R B C, eadem conſtrue, eritque ſegmentum C O B quæſitum.

PROPOSITIO XXXIV.

A Dato circulo ſegmentum auferre capiens angulum dato parem. Fig. 45.

Ad circuli diametrum F A duc perpendicularem B A L; ducatur item A C, *f* quæ faciat angulum B A C parem dato. Hæc auferet ſegmentum A Q C capiens angulum parem dato; uti patet ex 32. f Per 23. l. 1.

PROPOSITIO XXXV.

SI in circulo duæ rectæ (C L, B F) ſe ſecuerint, rectangulum (C O L) ſub ſegmentis unius æquale eſt rectangulo (B O F) ſub ſegmentis alterius comprehenſo. Fig. 46. 47. 48.

Si ſe interſecant in centro A, res patet. Fig. 46.

Si una C L tranſit per centrum A, & reliquam B F ſecat bifariam, ſecabit quoque *a* perpendiculariter, ac proinde quad. F O eſt rectangulum F O B. Ducatur A F; Quoniam C L biſecta eſt in A, & aliter in O, erit a Per 3. l. 3.

{ rect. C O L. / quad. A O } æ. *b* quad. A L; hoc eſt b Per 4. l. 2.

 quad.

c Per 47. l. 1. quad. A F; hoc eſt *c* { quad. A O, quad. F O }

Demto igitur communi quadrato A O, erit rect. C O L. æ. quad. F O, hoc eſt rect. F O B.

Fig. 47. Si una, C L, per centrum tranſit, & reliquam B F ſecat inæqualiter in O, ex centro A ducta recta ſecet ipſam B F in I bifariam.

d Per 3, l. 3. Igitur angulus A I B *d* rectus erit. Iam quia C L biſecta eſt in A & aliter in O, erit

e Per 5. l. 2. { rectang. C O L, cum quad. A O } æ. *e* quad. A L; hoc eſt

f Per 47. l. 1. { quad. A B; hoc eſt *f* { quad. A I, quad. B I } }

g Per eand. Sed quadratum A O æquatur *g* quadratis O I, A I. Ergo

{ rectang. C O L., quad. O I, quad. A I } æ. { quad. A I., quad. B I. }

Demto igitur communi quadrato A I, remanent

{ rect. C O L., quad. O I } æ. quad. B I

Atqui etiam quadratum B I æquatur rectangulo *i* F O B cum quadrato O I, quia F B *i Per 5. l. 2.* ſecta eſt bifariam in I & aliter in O. Ergo

{ rectang. C O L., quad. O I } æ. { rect. F O B, quad. O I. }

Demto

Demtoigitur communi quadrato, O I,erit
rect. COL. Æ. rect. F O B.

Quod ſi neutra rectarum C L,F B per centrum tranſeat, per communem earum ſectionemO per centrum A,ducatur recta XZ. Per modo demonſtrata tam rectang. COL quam rectang.F O B æquantur rectangulo Z O X.Ergo etiam COL,F O B æqualia ſunt inter ſe. Fig. 48.

PROPOSITIO XXXVI.

SI à puncto (B) extra circulum dato ducantur duæ rectæ, una tangens (BF) altera ſecans (B C;) erit rectangulum (C B O) ſub tota ſecante (C B) & parte (B O) inter punctum & circulum interjectâ comprehenſum, æquale quadrato tangentis (B F.) Fig. 49. 50. 51.

Si ſecans B C tranſit per centrum A, junge A F, faciet hæc *a* cum F B angulum rectum.Quoniam CO biſecta eſt in A, eique adjecta O B, erit Fig. 49. a Per 18.l.3.

$\left\{\begin{array}{l}\text{rect.C BO,}b\ \text{Æ. quad. A B hoc eſt }c\\ \text{quad. AO}\end{array}\right.$ b Per 6. l. 2. c Per 47.l.1.

$\left.\begin{array}{l}\text{quad. B F}\\ \text{quad. A F}\end{array}\right\}$

Ablatis ergo quadratis A O, A F,æqualibus, remanet.

rect. C B O. Æ. quad. B F.

Quod

Fig. 50. 51. Quod ſi C B non tranſit per centrum A, ducantur A B, AF, AO, & AL ex centro ducta biſecet O C in L. Ergo angulus
d Per 3 l. 3. ALO *d* rectus erit. Item A F B *e* erit re-
e Per 18. l 3. ctus. Quoniam vero CO biſecta eſt in L, eique adjecta eſt O B, erit

f Per 6. l. 2. { rect. C B O. } Æ. *f* quad. L B.
{ quad, L O }

Addatur utrimque quadratum A L, erit

{ rect. C B O. } Æ. quad. L B }
{ quad. L O } quad. A L }
{ quad. A L }

Sed quadrata L O, AL æquantur quadra-
g Per 47. l. 1. to *g* A O ſeu A F; & quadrata L B, A L
i Per eand. *i* æquantur quadrato A B. Ergo
k Per eand. { rect. CBO. } Æ. quad. AB; hoc eſt *k*
{ quad. A F }

quad. B F }
quad. A F. }

Ablato igitur communi quadrato A F, remanet

rect. C B O. Æ. quad. B F.

Corollaria.

Fig. 52 1. SI ab eodem extra circulum puncto B. quotvis ducantur ſecantes BC, omnia rectangula C B O, inter ſe æqualia ſunt. Singula, enim æquantur quadrato tangentis B F.

2. Quæ

2. Quæ ex eodem puncto circulum tangunt, B F, BQ æquales ſunt. Earum quippe quadrata æquantur ſingula eidem rectangulo C B O.

PROPOSITIO XXXVII.

SI rectangulum ſub C B & O B ſit æquale quadrato B F, hæc circulum tanget in F. *Fig. 52.*

Ex B ducatur tangens B Q, & ex E centro ductis ad Q & F rectis E Q, E F, jungatur B E. Quoniam rectangulo CBO æquantur quadratum BF per hyp. & quadratum B Q per 36. hæc inter ſe æqualia ſunt, adeoque & rectæ B Q, B F æquales. Igitur triangula F E B, Q E B ſibi mutuo ſunt æquilatera. Ergo *b* anguli Q F, æquales erunt. Sed Q *c* rectus eſt. Ergo etiam F rectus eſt. Ergo B F *d* tangit.

b *Per 8. l. 1.*
c *Per 18. l. 3.*
d *Per 16. l. 3.*

ELE.

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ
LIBER IV.

Hic liber totus problematicus eſt; docet, quo artificio figuræ præſertim ordinatæ circulo inſcribantur & conſcribantur. Ampliſſimus eſt illius uſus in munitionibus exſtruendis & ex illo quaſi fonte eximæ illæ ſinuum, tangentium, & ſecantium tabulæ ingenti bono Matheſeos fluxère,

DEFINITIONES.

1. Figura rectilinea circulo inſcripta eſt, vel circulus figuræ circumſcriptus, cum ſingulorum angulorum vertices in circumferentia exiſtunt.

2. Figura rectilinea circulo circumſcripta eſt, vel circulus figuræ inſcriptus eſt. cum ſingula latera circulum tangunt.

3. Figura ordinata ſeu regularis eſt, quæ æquilatera & æquiangula eſt.

PRO-

PROPOSITIO PRIMA.

Circulo (B D) rectam datam (A) diametro non majorem, inſcribere. Fig. l. 1. 4.

Accipe in peripheria quodvis punctum B. Centro B intervallo datæ A deſcribe arcum circulo occurrentem in C. Duc rectam B C. Dico factum.

PROBOSITIO II.

Circulo triangulum inſcribere dato (X) æquiangulum. Fig. 2.

Circulum tangat E F in D. Fiat angulus E D G par *o* angulo C, & F D H par B: jungaturque G H. Dico factum. Nam angulus H, æquatur *a* angulo E D G: hoc eſt *b* angulo C; & G æquatur *c* F D H; hoc eſt *d* ipſi B. Ergo etiam G D H *f* æquatur A. Factum eſt igitur quod petebatur.

o Per 23. l. 1
a Per 32. l. 3
b Per conſtr.
c Per 32. l 3.
d Per conſtr.
f Per corol. g p. 32. l. 1.

PROPOSITIO III.

Circulo circumſcribere triangulum æquiangulum dato I L K. Fig. 3.

Latus I K utrimque producatur, ut fiant externi anguli O, & N. Fac in centro A per 23. l. 1. angulos G A B, B A F pares angulis O, N. Deinde in punctis G, B, F circulum tangant

tangant tres rectæ coeuntes in C, E, D. Triangulum C D E eſt circulo circumſcriptum & æquiangulum dato I L K.

a Per 18. l. 3 In quadrilatero C G A B, anguli G & B
b Per theor. ſunt duo *a* recti. Ergo reliqui G A B, & C
1. ſchol. poſt conficiunt ſimul etiam duos *b* rectos, ac
32. l. 1. proinde æquantur duobus ſimul O, I. Ablatis igitur G A B, & O æqualibus per conſtr. remanent æquales C, & I. Eodem modo oſtenditur E æqualis eſſe K. Ergo D & L
c Per corol. 9. p. 32. l. 1. *c* etiam æquales erunt. Factum eſt igitur quod petebatur.

Quod autem tangentes concurrant, ſic oſtenditur. Anguli O, I, & K, N ſunt æqua-
e Per 13. l. 1. les *e* 4. rectis, & I, K ſunt minores duobus
f Per 32. l. 1. *f* rectis. Ergo O, N, (hoc eſt per conſtruct. G A B & B AF) ſunt majores duobus re-
g Per corol. ctis. Ergo G A F eſt minor duobus *g* rectis.
3. p. 13. l. 1. Ergo recta G F cadit inter A & D. Ergo cum A G D, A F D ſint recti, erunt D G F,
i Per ſchol. D F G duobus rectis minores. Ergo *i* C
poſt 31. l. 1. G D, E F D concurrunt verſus D. Simili ratione demonſtrabis concurrere reliquas.

PROPOSITIO IV.

Fig. 30. T*Riangulo circulum inſcribere.*

Duos angulos C & E biſeca rectis C A, E A coeuntibus in A. Ex A duc perpendiculares A B, A G, A F. Circulus centro

tro A, per B deſcriptus, tranſibit etiam per G & F, tangetque tria latera trianguli.

In triangulis enim CAG, & CAB, quia anguli A G C, ABC, itemque GCA, BCA per conſt. æquantur, & latus quoque A C eſt commune, etiam A G, A B *a* æqualia erunt. Pari modo oſtendam paria eſſe A B, AF. Circulus ergo deſcriptus centro A tranſit per A, G, F: & quia anguli ad B, G, F ſunt recti, tangit *b* omnia trianguli latera Fecimus ergo quod petebatur.

a Per 26. l. 1.

b Per 16. l. 3.

PROPOSITIO V.

Triangulo circulum circumſcribere: ſive per tria data puncta (B, C, D) non ad unam rectam poſita, circulum deſcribere. Fig. 4.

Puncta data B, C, D, binis rectis B C, CD connecte, quas biſeca perpendicularibus OA, EA concurrentibus in A. Hoc erit centrum circuli per B, C, D tranſeuntis.

Ductæ intelligantur rectæ A C, A D, A B. per conſtr. latera DO, AO æquantur lateribus CO, OA, & anguli ad O ſunt recti. Ergo AD *a* æquatur A C. Eodem modo A B æquatur A C. Ergo etiam A D, A B *b* æquales. Ergo circulus centro A deſcriptus per B, tranſibit etiam per C & D. Quod petebatur.

a Per 4. l. 1.

b Per axio. 1

Ad

Ad praxim tantum opus centris B, C, D, deſcribere tres æquales circulos ſe mutuo interſecantes; & per interſectiones ducere rectas, hæ ſibi occurrentes dabunt centrum quæſitum.

PROPOSITIO VI. & VII.

Fig. 5.

CIrculo quadratum inſcribere, & circumſcribere.

Ducantur diametri B D, C E ſe mutuo ſecantes perpendiculariter; rectæ, quæ harum terminos jungunt, circulo quadratum inſcribunt.

Demonſtratio patet ex 4. l. 1. & ex 31. l. 3. Ducantur deinde quatuor tangentes circulum in B, C. D, E concurrentes in I, F, G, H. Figura I F G H quadratum eſt circulo circumſcriptum.

Demonſtratio patet ex 18. l. 3. ex coroll. 2. p. 36. l. 3. ex 28. & 34. l. 1.

Scholium.

Fig. 5.

d Per 31. l. 3

e Per 47. l. 1

QUadratum circumſcriptum circulo, duplum eſt inſcripti. Nam quia angulus B C D in ſemicirculo rectus d eſt; erit quadratum ex D B (hoc eſt quadratum F I) æquale quadratis D C, B C, ac proinde duplum quadrati D C, hoc eſt quadrati C D E B,

PRO-

PROPOSITIO VIII. & IX.

QVadrato (BEFC) circulum inſcribere & circumſcribere. Fig. 6.

Ducantur diametri in quadrato ſe ſecantes in A. Centro A per B deſcriptus circulus tranſibit etiam per E, F, C.

Deinde ex A duc AD perpendicularem ad CB. Centro A per D deſcriptus circulus tanget omnia quadrati latera.

Pars 1. Quia ex hyp. CB, EB latera ſunt æqualia, erunt anguli BCE, BEC *a* æquales. Angulus autem CBE rectus eſt per hyp. Ergo BCE, BEC *b* ſunt ſemirecti. Eodem modo oſtendam CBF & reliquos eſſe ſemirectos, adeoque æquales inter ſe: Ergo in triangulo BAC cum duo ſint æquales anguli CBA, & BCA, erunt AB & AC *c* æquales. Eadem ratione AB, AE, AF æquales erunt. Circulus igitur centro A per B deſcriptus tranſibit etiam per E, F, C.

a Per 5. l. 1.
b Per corol. 11. p. 32. l. 1.
c Per 6. l. 1.

Pars 2. Ex A ſint perpendiculares inſuper AG, AH, AI. Quoniam in triangulis GBA & DBA anguli ad D & G, itemque ad B inter ſe æquales ſunt, latuſque AB commune, latera *e* AD, AG æqualia erunt. Eadem ratione æqualia ſunt AG, AH, AI. Circulus ergo centro A per D tranſiens, tranſibit etiam

e Per 26. l. 1.

f Per 16.l.3. per G,H,I, tangetque latera *f* omnia quadrati, quia anguli ad D,G,H, I ſunt recti. Fecimus ergo quod petebatur.

PROPOSITIO X.

Fig. 7. *Triangulum iſoſceles conſtruere (B A C) in quo angulus ad baſim (A B C, vel A C B,) ſit duplus anguli ad verticem (A.)*

Sumatur quævis recta A B, quam ita ſeca
a Per 11.l.2. ca *a* in D, ut rectangulum AB C ſit æquale quadrato D A. Tum centro A per B de-
b Per 1. l.4. ſcribe circulum, cui inſcribe B C *b* æqualem D A, & junge A C. Erit triangulum B A C quæſitum.

Ducatur enim recta DC, & per C, D, A,
c Per 5. l. 4. deſcribe *c* circulum. Qoniam rectangulum
d Per 37. l.3. A B D æquatur quadrato A D, hoc eſt B C, liquet B C tangere *d* circulum D C,
e Per 32.l.3. quem ſecat C D, Ergo angulus BCD æquatur *e* angulo A in ſegmento alterno: additoque communi DCA, erit BCA æqualis duobus A, & D C A. Sed quia latera
f Per 5. l. 1. A B, A C æquantur, A B C æqualis *f* eſt B C A. Ergo etiam ABC æquatur duobus A, & DC A. Sed etiam externus BDC
g Per 32.l.1. *g* æquatur duobus internis A & DCA. Ergo A B C & B D C æquales ſunt. Recta
h Per 6. l. 1. igitur D C æquatur *h* B C, hoc eſt per conſt.

conſt. D A. Ergo anguli A & D C A *k* æquantur. Quare angulus A B C, qui duobus oſtenſus eſt æqualis, duplus erit unius A. Factum igitur eſt; qnod petebatur. *k Per 5. l. 1.*

Corollarium.

ANguli ad baſim ſinguli B & C in triangulo iſoſcelio jam conſtructo ſunt duæ quintæ duorum rectorum, ſeu quatuor quintæ unius recti, & reliquus A eſt una quinta duorum rectorum ſeu duæ quintæ unius. Patet ex propoſitione hac & ex 32. lib. 1.

PROPOSITIO XI.

CIrculo pentagonum ordinatum inſcribere. *Fig. 8. & 7.*

Deſcribatur *a* triangulum BAC habens angulum ad baſim duplum anguli ad verticem. Huic æquiangulum C AD *o* inſcribe circulo. Angulos ad baſim ACD, & ADC ſeca bifariam rectis C E, D B, occurrentibus circulo in E & B. Puncta A, B, C, D, E, rectis lineis connexa dabunt pentagonum ordinatum circulo inſcriptum. *a Per prac.* *o. Per 2. l. 4.*

Nam ex conſtructione liquet quinque angulos I, N, Q, S, O æquales eſſe. Quare etiam arcus iis ſubtenſi, A E, E D, D C, C B, B A *b* ſunt æquales. Itaque rectæ ſubtenſæ arcu- *b 28. l. 3.*

c *Per* 27. *l.* 3. arcubus etiam æquales *c* erunt. Pentagonum igitur æquilaterum eſt. Eſt vero etiam d *Per* 29. *l.* 3. æquiangulum *d* quia ejus anguli B A E, A E D, &c. inſiſtunt arcubus æqualibus B C D E, A B C D, &c. Factum eſt igitur quod petebatur.

Corollarium.

Fig. 8. Angulus Pentagoni ordinati facit ſex quintas unius recti, ſeu tres quintas duorum. Nam tres anguli ad A, cùm ſint æquales, utpote æqualibus arcubus B C, C D, D E inſiſtentes, & medius per coroll. præced. ſit duæ quintæ unius recti, tres ſimul, hoc eſt ipſe pentagoni angulus, conficient ſex quintas unius recti.

Scholium.

Ingenioſa eſt Euclidæa pentagoni inſcriptio, ſed multò expeditior illa Ptolomæi, quam tradit lib. 1. *Almageſti, & eſt ejuſmodi.*

Fig. 12. *Ducantur diametri E D, BF ſe mutuo perpendiculariter interſecantes in A. Radium A D biſeca in C. Centro C per B deſcribe arcum, diametro E D occurrentem in G. Recta G B eſt latus pentagoni, & A G decagoni.*

Demonſtratio hic dari nequit, pendet enim à lib. 13. *Eucl. Eam vide apud Clavium in ſcholio poſt p.* 10. *l,* 13.

Pro-

Problema.

Super data rectâ (A B) pentagonum ordinatum ita conſtrues. Seca e *A B, ſicut rectangulum A B C ſit æquale quadrato AC. Ex AB utrimque productâ aufer A D B E æquales majori ſegmento A C. Centris A & D, intervallo A B deſcribe arcus duos ſe ſecantes in F: Item centris B & E, eodem intervallo ſe ſecantes in G. Rurſum centris F & G, intervallo itidem A B, alios ſe ſecantes in I. Puncta A, F, I, G, B rectis lineis juncta dabunt pentagonum ordinatum, (hoc eſt æquilaterum, & æquiangulum) ſuper datâ A B.* Fig. 9. e Per 11. l 2.

Æquilaterum eſſe patet ex conſtructione: æquiangulum eſſe ſic demonſtrabitur. Ducatur DF. Patet ex conſtructione triangulum A F D eſſe iſoſceles. Et baſis A D eſt majus ſegmentum lateris D F extrema & media ratione ſecti (eſt enim D F æqualis A B, & A D, æqualis A C.) Ergo angulus o *D A F eſt duæ quintæ duorum rectorum. Ergo reliquus F A B eſt* p *tres quintæ duorum rectorum ſive ſex quintæ unius recti: ac proinde eſt* q *angulus pentagoni ordinati. Eodem modo oſtenditur angulum G B A eſſe ſex quintas unius recti, ac proinde parem F A B. Unde neceſſe jam eſt reliquos F, G, I, his æquales eſſe, ut patet ex 8. l. 1. ſi concipiatur ſubtendi recta F G.* o Per corol. p. 10. l. 4. p Per 13. l. 1. q Per corol. p. 11. l. 4.

PROPOSITIO XII.

Fig. 10. *Circulo pentagonum ordinatum circumſcribere.*

Inſcribatur pentagonum ordinatum per præced. G H I K M, ducanturque tangentes in punctis, G,H,I, K, M, quæ concurrant in B, C, D, E, F. Dico factum.

Ex centro duc rectas A G, A B, A H, A C, AI. Quoniam B G, B H ex uno puncto B, tangunt circulum, æquales *a* erunt. Trigona igitur G A B, H A B, ſibi mutuo æquilatera ſunt. Æquantur ergo *b* anguli Q, P, item Q, S: ac proinde totus B duplus eſt ipſius P, & totus G A H duplus eſt S: Eâdem de cauſâ anguli C & H A I dupli ſunt ipſorum T, & N. Sed G A H, & H AI, æquales *c* ſunt, quia inſiſtunt arcubus æqualibus GH, HI, per conſtr. Ergo etiam eorum dimidii S. N æquales erunt. Quoniam igitur in triangulis BAH, CAH, duo anguli S, N, æquantur, itemque duo ad H *d* recti, latuſque AH eſt commune, etiam *e* BH, CH, itemque anguli, P, T, æquales erunt. Eodem modo oſtendam rectas B G, F G eſſe æquales. Igitur CB, FB duplæ ſunt æqualium BG, BH, ac proinde æquales. Eodem modo oſtendam reliqua latera pentagoni circumſcripti

a *Per corol. 2 p. 36. l. 3.*
b *Per 8. l. 1.*
c *Per 29. l. 3.*
d *Per 18. l. 3.*
e *Per 26. l. 1.*

cumſcripti eſſe æqualia. Illud igitur æquilaterum erit: eſt vero & æquiangulum, quia cum jam oſtenſum ſit angulos, B, & C, duplos eſſe æqualium, P, & T; etiam ipſi æquales erunt: eodemque modo & reliqui. Ordinatum igitur pentagonum circulo circumſcripſimus. Quod erat faciendum.

Eodem artificio circulo circumſcribitur ordinata figura quæcunque, ſi prius illi ſimilis circulo inſcribatur.

PROPOSITIO XIII. XIV.

Pentagono ordinato circulum inſcribere, & circumſcribere. Fig. 11.

Duos pentagoni angulos B, C, biſeca rectis B N, C S concurrentibus in A. Ex A duc perpendicularem A L.

Circulus centro A per L deſcriptus, tanget omnia pentagoni latera. Circulus vero deſcriptus centro A, per B, tranſibit etiam per C, D, E, F.

Pars 1. In trigonis D C A, B C A, quia latera D C, C A, *a* lateribus B C C A, itemque *b* anguli P, & O æquantur, etiam G, & I, æquales *c* erunt, Sunt vero *a* etiam toti B & D æquales. Quare cum *d* angulus G ſit dimidius anguli, B, etiam I, erit dimidius ipſius D. Igitur D quoque biſectus eſt recta DM. Ob eandem cauſam, reliqui pentagoni an-

a Per hyp.
b Per conſtr.
c Per ... l. 1.
a Per hyp.
b Per conſtr.

guli E, F ſunt biſecti; ac proinde omnes dimidii anguli inter ſe æquales erunt. Ducantur inſuper perpendiculares A M, A S, AN, A R. Quoniam igitur in trigonis

e Per corol. 2.p.36.l.3. L B A, M B A, anguli G, & Q æquantur, & latus L B lateri M B *e* æquale eſt, latuſque

f Per 4.l.1. B A commune, etiam *f* A L, AM æquales erunt. Pari modo oſtendam reliquas A M, AS, AN, AR inter ſe æquari. Circulus ergo centro A tranſiens per L, tranſibit etiam per M, S, N, R: & quia anguli ad L, M, S,

g Per 16.l.3. N, R, recti ſunt per conſtr. tanget *g* quinque latera pentagoni. Quod erat primum.

Pars 2. in trigono C A B, quia anguli O, & G, jam oſtenſi ſunt æquales, erunt latera

h Per 16.l.1. AC, AB *h* æqualia: eâdemque ratione æquantur etiam A B, AF, AE, A D; ac proinde circulus centro A tranſiens per B, tranſibit etiam per C, D, E, F. Pentagono igitur circulum inſcripſimus & circumſcripſimus. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO XV.

Fig. 13. *IN dato circulo Hexagonum ordinatum deſcribere.*

Ducatur diameter F A B. Centro B per centrum A, deſcribe circulum, qui datum ſecet in C, & D. Item centro F per A deſcribe circulum, qui ſecet datum in, E, & G,

ſex

ſex puncta B, C, F, G, D, rectis lineis connexa dabunt quæſitum.

Ex centro A emittantur rectæ AC, AE, AG, AD. Patet triangula H, I M, L *a* eſſe æquilatera: deinde quia anguli CAB, EAF, ſinguli *b* efficiunt unam tertiam rectorum duorum, ac proinde ſimul duas tertias, patet *c* E A C etiam eſſe unam tertiam duorum rectorum. Anguli igitur EAC, CAB æquales ſunt, ſunt autem & latera E A, A C, æqualia lateribus B A, A C. Ergo *d* baſis E C baſi C B, hoc eſt (ut jam oſtenſum) radio, A C, æqualis eſt. Quare etiam N æquilaterum eſt. Eodem modo oſtenditur æquilaterum eſſe K. Quoniam igitur triangula omnia H, I, K, L. M, N, æquilatera ſunt. Patet latera ſingula C B B D, DG, G F, F E, E C æquari radio circuli A C, ſeu A B, ac proinde inter ſe. Hexagonum igitur æquilaterum eſt. Eſt vero & æquiangulum, cum ſinguli ejus anguli E, C, B, D, G, F conſtent duobus æquilateri trianguli angulis. Ergo Hexagonum quod circulo inſcripſimus, eſt ordinatum.

a *Ex* 1, *l.* 1.
b *Per corol.* 12. *p.* 32. *l.* 1.
c *Per coroll.* 1. *p.* 13. *l.* 1.
d *Per* 4. *l.* 1.

Corollaria.

1. Latus hexagoni circulo inſcripti æquale eſt radio.

2. Angulus hexagoni ordinati eſt quatuor tertiæ unius recti, conſtat enim ex duo-

bus

bus angulis trianguli æquilateri quorum
d Per corol. 12.p.32.l.1. ſinguli conficiunt *d* duas tertias unius recti.

Fig. 14. 3. Si ducatur inſuper diameter PS, perpendicularis alteri F B, & intervallo radii PA, centris P, & S, ſectiones fiant in O, & Q, in R, & T; puncta P, E, O, F, R, G, S, D, T, B, Q, C, rectis lineis connexa dabunt duodecangulum ordinatum unâ circini aperturâ circulo inſcriptum. Id quod magno eſt uſui in Gnomonica.

Fig. 14. 4. Ex demonſtratis elicitur etiam deſcriptio facillima trianguli æquilateri in circulo. Ducta diametro F B, centro B per A centrum deſcribe arcum C A D. Puncta C, F, D, rectis juncta dant æquilaterum quæſitum.

5. Æquilateri trianguli latus (C X D) à diametro (B F) ad ipſum perpendiculari, quartam partem (BX) abſcindit. Nam anguli A CX, BCX, æqualibus arcubus G, D,
e Per 29. l. 3. D B inſiſtentes, æquales *e* ſunt: & latera AC, CX æquantur lateribus BC, CX. Er-
f Per 4. l. 1. go AX, BX *f* æquales ſunt. Ergo B X eſt quarta pars diametri B F.

Scholium.

Problema.

Fig. 13. g Per 1. l. 1. H*Exagonum ordinatum ſuper data recta (CB) ita conſtrues. Fac g triangulum C A B æquilaterum*

laterum ſupra datam C B. *Centro A per* B, & C *deſcribe circulum. Is capiet hexagonum ſuper datâ rectâ* C B. *Patet ex propoſ. & corol.* 1.

Theorema.

Q*Uadratum ex latere trianguli æquilateri, triplum eſt quadrati ex ſemidiametro circuli, cui inſcriptum eſt, adeoque ad quadratum diametri eſt ut* 3 *ad* 4.

Ducatur ſemidiameter A D. Quadratum F D, æquatur quadratis s *F A, D A, & rectangulo F A X bis. Sed rectang. F A X bis eſt par quadrato ſemidiametri F A ſeu D A (nam quia A X, X B æquales* t *ſunt rectangulum F A X bis æquatur duobus rectangulis nempe ſub F A, A X, & ſub F A, X B; hoc eſt rectangulo* u *F A B; hoc eſt quadrato F A) Ergo quadratum F D triplum eſt quadrati ex ſemidiametro,* Fig. 14. s Per 12. l. 2. t Per coroll. 5. præced. u Per 1. l. 2.

Quia autem quadratum totius diametri F B x *quadruplum* x *eſt quadrati F A. Patet quadratum F D eſſe ad quadratum diametri, ut* 3. *ad* 4. x Per 4. l. 2.

Hinc ſequitur latus æquilateri trianguli eſſe ad diametrum, ut radix quadrata ternarii eſt ad 2. *radicem nempe quadratam quaternarii, ac proinde eſſe lineas incommenſurabiles,*

PROPOSITIO XVI.

Fig. 15.

I*N circulo quindecagonum ordinatum deſcribere.*

Cir-

a Per 11. l. 4. b Per corol. 4. p. 15. l. 4. Circulo inſcribe *a* latus pentagoni A C & trianguli *b* æquilateri latus A D. Arcum C D biſeca in E. C E eſt latus quindecagoni.

Nam ſi tota peripheria ſtatuatur eſſe 15. erit arcus A C, 3. & arcus A D, 5. ac proinde arcus C D, 2. ideoque C E unum.

Corollarium.

Fig. 15. HAc methodo innumeræ figuræ ordinatæ circulo inſcribentur. Nam ſi duarum ordinatarum latera A C, A D circulo ſint inſcripta, arcuum differentia C D continebit tot latera novæ figuræ ordinatæ, quot unitatibus differunt denominatores priorum. Denominator autem novæ figuræ habetur, ſi denominatores priorum inter ſe multiplicentur.

Vt ſi A D ſit latus quadrati, & A C decagoni. Denominatorum differentia eſt 6. Igitur arcus C D continet 6. latera figuræ novæ. Ea vero eſt 40. laterum. Denominatores enim 4. & 10. inter ſe multiplicati faciunt 40.

Scholium.

NOndum reperta ars eſt, quâ ſolo circino & regulâ inſcribantur circulo figuræ ordinatæ laterum 7, 9, 11. 13, 17. &c. Cum illa inſcriptio figura-

figuratum dependeat à diviſione circumferentiæ in partes datas, quæ etiamnum deſideratur. Licebit tamen, circuli circumferentiâ in 360. partes diviſâ, mechanicè figuras quaſcunque ordinatas circulo inſcribere hunc in modum.

Problema 1.

GRadus 360. (*hoc eſt totam circumferentiam*) *divido per denominatorem polygoni inſcribendi* (*exem. gr. nonanguli*) *quod unitatibus conſtat quotiens* (40.) *tot graduum fac in centro angulum* AGK. AK *erit latus figuræ quæſitæ* (*nonangulæ*) *circulo inſcribendæ.* Fig. 13.

Problema 2.

AT *ſuper data recta quamvis figuram ordinatam deſcribes præſidio tabellæ ſequentis Angulus rectus eſt ad angulum figuræ.* Fig. 15.

					differ.
In Pentagono	*ut*	5	*ad*	6...	1
Hexagono	*ut*	3	*ad*	4..	1
Heptagono	*ut*	7	*ad*	10...	3
Octogono	*ut*	2	*ad*	3...	1
Nonagono	*ut*	9	*ad*	14..	5
Decagono	*ut*	5	*ad*	8..	3
Undecagono	*ut*	11	*ad*	18...	7
Duodecagono	*ut*	3	*ad*	5..	2

Oporteat igitur ſuper data recta XB *heptagonum ordinatum deſcribere. Centro* X *deſcribe circulum* Fig. 15.

culum, à quo abſcinde quadrantem BO. Vide in tabula quæ ſit proportio recti anguli ad angulum heptagoni, reperies, ut 7. ad 10. & differentia eſt 3. Quadrantem igitur partire in 7. arcus æquales, quorum adhuc tot ipſi adde ex O in N; quot unitates habet differentia. Per tria puncta B X N.

a Per. 5. l. 4. deſcribe a circulum, hic capiet heptagonum datæ rectæ X B.

Tabella confecta eſt ope theorematis 2. in ſchol. poſt. 32. l. 1. quo reperitur numerus rectorum angulorum, quos efficiunt anguli cujuſcunque rectilinei, qui numerus diviſus per denominatorem figuræ exhibet denominatorem proportionis anguli figuræ ad rectum.

Quoniam vero de figuris ordinatis multa hactenus ſunt propoſita, finiat hunc librum Procli celebre theorema.

Theorema.

TRes tantum figuræ ordinatæ videlicet 6. triangula æquilatera, 4. quadrata, 3 hexagona, ſpacium replere poſſunt: Hoc eſt unam continuam ſuperficiem conſtituere. Quod ſic demonſtratur. Vt aliqua figura ordinata ſæpius repetita poſſit replere ſpacium, requiritur ut anguli plurium ejus ſpeciei figurarum circa unum punctum compoſiti, poſſint conficere quatuor rectos; tot enim circa unum punctum poſſunt conſtitui, ut patet ex coroll. 3. p. 13. l. 1. exempli gr. ut triangula æquilatera poſſint replere ſpacium, requiritur, ut aliquot anguli talium triangulorum

Fig. 13. N, M L K, I, H, circa punctum A compoſiti efficiant quatuor rectos. Atqui quatuor rectos efficiunt, 6. anguli trianguli æquilateri (nam unus facit

Facit duas tertias b *unius recti, ac proinde 6. faciunt, 12, tertias unius recti, hoc eſt 4. rectos;) item 4. anguli quadrati, ut patet, item 3. anguli hexagoni (unus enim facit 4. tertias* c *unius recti, ac proinde 3. faciunt 12. tertias unius recti, hoc eſt rurſum 4. rectos.) Ergo &c.*

b *Per corol. 12. p. 32. l. 1.*

c *Per corol. 2. p. 15. l. 4.*

Quod autem id nulla alia figura poſſit, liquidò conſtabit ſi angulum ejus repertum, ut ſupra, quocunque numero multiplices: ſemper enim aut deficient à 4. rectis, aut excedent.

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ

LIBER V.

QUanti momenti in Geometria
ſit ſcientia proportionum, nemo
eſt Mathematicus, qui ignoret.
Ea traditur ab Euclide toto quinto
& ſexto libro. Sed quamvis illi
cæteriſque elementorum condito-
ribus plurimum debeamus; in iis tamen, quæ
de proportione tradiderunt, deſiderari aliquid vi-
detur. Difficultas tota in definitione 5. l. 5. verti-
tur: ubi tradit Euclides, quid ſit quatuor magni-
tudines eſſe proportionales, ſive duas rationes, eaſ-
dem, ſimiles, æquales eſſe. Definit igitur duas rati-
ones tum æquales dici ſeu ſimiles, quando antece-
dentia quocunque numero æqualiter multiplica-
ta, conſequentibus etiam quocunque numero
æqualiter multiplicatis, ſemper vel ſimul æqualia
ſunt, vel ſimul majora, vel ſimul minora a. Atque
ex ea definitione omnes deinde 5. & 6. libri demon-
ſtrationes mediatè vel immediatè deducit. Hæc
doctrinæ Euclidææ ſumma: quæ multiplicem, ut
dixi, difficultatem habet. Nam imprimis certum
eſt eâ definitione non naturam æqualium ratio-
num, ſed affectionem ſolummodo aliquam ex-
plicari. Deinde illa multiplicium proprietas addu-
citur,

a Hæc definitio declaratur infra post defin. 6.

citur, vel tanquam ſignum infallibile rationum æqualitum, ut quandocumque ea demonſtrata fuerit de quibuſvis rationibus, inferre certò liceat æquales eas eſſe: vel is ſenſus illius eſt, ut per magnitudines eandem rationem habentes nihil aliud intelligi velit, quàm earum multiplices modo jam dicto excedere, vel excedi. Si primum; demonſtrare debuerat, eam affectionem omnibus & ſolis rationibus æqualibus ineſſe, ut ex eâ rationum æqualitas certò poſſit inferri. Id verò minimè vulgare theorema eſt, quod neque Euclides, neque alius poſt Euclidem ullus demonſtravit. Si ſecundum, ſecuri quidem erimus de veritate theorematum in ſenſu definitionis acceptorum, minimè tamen ex vi demonſtrationum nobis conſtare poterit de abſolutâ rationum æqualitate. Exemplum eſto prima ſexti. Certi erimus ex Euclidæâ demonſtratione rationem triangulorum A B C, & D E F æqualem eſſe rationi baſium A C, & D F, per rationum æqualitatem, ſolùm intelligendo dictam illam proprietatem multiplicium; non colligemus tamen rationes illas triangulorum, baſium rationibus verè & abſolutè æquales eſſe, cum demonſtratum non ſit affectionem illam multiplicium cum abſolutâ & verâ rationum æqualitate neceſſario eſſe connexam. Quomodocunque igitur illa definitio accipiatur, librorum 5. ac 6. demonſtrationes vacillant, quamdiu demonſtratum non fuerit veram rationum æqualitatem cum ea multiplicium proprietate ſemper eſſe connexam. Denique ut ſibi conſtarent omnia; tamen ille multiplicium labyrinthus mihi, aliiſque ſemper diſplicuit, & tyronibus plurimum ſemper

Fig. 2. l. 6. tabulâ 4.

faceſſunt negotii, quorum ita plerumque mentes intricat, ut exitum vix reperiant. Quare ut doctrinam proportionum, quæ quaſi medulla, atque anima Geometriæ, & univerſæ Matheſeos eſt, ab ea labe vindicemus, hæc tria præſtare conabimur.

Primò oſtendam libri quinti theoremata, quæ ab Euclide per multiplices demonſtrantur, eo ferè loco habenda eſſe, quo axiomata, ac proinde declaratione potiùs ſubinde aliquâ, quam demonſtratione egere. Ita proportionum cognitio, quam ille circuitus multiplicium difficilem hactenus, & perobſcuram effecerat, plana & expedita reddetur.

Secundo demonſtrabimus, quandocumque antecedentium quælibet æquè multiplices, conſequentium quibuſlibet æquè multiplicibus vel pariter majores ſunt, vel pariter minores, vel pariter æquales, tum rationes eſſe verè æquales, ſeu ſimiles. Quo ſtabilito omnes Euclidææ demonſtrationes, totaque illius de proportionibus doctrina ſubſiſtet, ut qui noſtris probationibus contentus non ſit, ad Euclidæas quamvis prolixas, jam tamen ſecuras ac ſolidas ſe poſſit convertere. Aſſignabimus item (ac demonſtrabimus,) proportionum æqualium aliud indicium clariſſimum ac primum, ex quo omnes Quinti libri propoſitiones, deducere poterit, qui voluerit.

Tertio. De proportionum denominatoribus, algorythmo, compoſitione, tractatum ſubjungam penitioris Geometriæ ſtudioſis planè neceſſarium, ubi etiam demonſtrabimus axoma illud, ſeu potiùs thorema hactenus indemonſtratum, rationem extremorum ex rationibus quotlibet intermediorum componi.

Tyro-

Tyronibus ſatis erit definitiones & primam partem perlegere.

PRIMA PARS.

Proportionum elementa faciliori methodo proponuntur.

DEFINITIONES.

1. PArs aliquota magnitudinis eſt, quæ aliquoties repetita, magnitudinem metitur, ſive adæquat. Pars aliquanta, quæ non metitur.

Longitudo unius pedis eſt pars aliquota longitudinis 10. pedum, quia illam decies repetita metitur. Longitudo vero 4. pedum, eſt pars aliquanta lineæ 10. pedum, quia aliquoties repetita, nempe bis, illam non adæquat, repetita vero ter, excedit.

2. Magnitudo magnitudinis multiplex eſt, cum minor metitur majorem, ac proinde ejus pars aliquota eſt; ſive cum major minorem aliquoties continet præcisè.

3. Ratio ſive proportio eſt duarum ejuſdem generis magnitudinum mutua quædam ſecundum quantitatem habitudo.

Sunt igitur in omni proportione duo termini, quorum ille Antecedens dicitur, qui primò nominatur, ſive is qui nominandi caſu effertur: alter Conſequens.

Cum antecedens & conſequens ſunt æquales, proportio Æqualitatis dicitur, cum inæquales, dicitur eſſe proportio inæqualitatis.

4. Ratio ſeu proportio rationalis eſt, quæ exiſtit inter magnitudines commenſurabiles,& numeris exprimi poteſt. Proportio irrationalis eſt,quæ exiſtit inter magnitudines in commenſurabiles, & nullis numeris explicari poteſt.

Porro commenſurabiles quantitates ſunt, quas aliqua communis menſura metitur; incommenſurabiles quas nulla metitur menſura communis.

Fig. 1. l. 5. tabulâ 3. 5. Duæ rationes(A ad B,& C ad F)ſunt ſimiles, æquales, eædem; cum unius antecedens (A) æquè ſeu eodem modo(hoc eſt nec magis, nec minus) continet ſuum conſequens (B,) quo alterius antecedens (C) continet ſuum conſequens (F.)

Fig. 2. Vel quando unius antecedens(A)eodem modo continetur in ſuo conſequente (B,) quo (C) antecedens alterius in ſuo (D.)

Fig. 3. 6. Duæ rationes ſunt diſſimiles, ſive una ratio eſt major alterâ,quando unius antecedens(I) magis continet ſuum conſequens
Fig. 4. (L;) quam alterius antecedens (O) contineat

neat ſuum conſequens (Q;) vel quando antecedens unius, minus continetur in ſuo conſequente, quàm antecedens alterum contineatur in conſequente ſuo.

Proportionum æqualitas & inæqualitas explicatur.

Quid porro ſit unum antecedens æquè, vel magis continere ſuum conſequens, quàm antecedens alterum contineat ſuum, ſi proportiones ſint rationales, definiri & explicari ulterius poteſt per numeros, ut ſi A ſit triplum B, & C triplum F, perſpicuum erit, quid ſit, A æquè ſeu eodem modo continere B, quo C continet F: vel ſi I ſit triplum L, O verò duplum, Q; conſtabit rurſum, quid ſit I magis continere L, quam O contineat Q. At ſi proportiones fuerint irrationales, ea res explicari ulterius nec poteſt, nec debet. Dentur magnitudines incommenſurabiles A, B, perſpicuum eſt A non ſolùm majus eſſe B, ſed etiam certo quodam modo eſſe majus, (A quippe aliter continet B, quàm alia quælibet major minorve quàm A;) neque tamen ulteriùs quæri, aut explicari debet, quis ſit certus ille modus, quo A continet B; quia per nullos numeros explicabilis eſt. Itaque quemadmodum datis binis incommenſurabilibus quantitatibus non debet ulteriùs quæri, quid ſit unam certo modo continere alteram, ita neque cum dantur quatuor proportionales incommenſurabiles, quæri debet ulteriùs, quid ſit C eodem modo continere D, quo A con-

Fig. 1. Fig. 3. Fig. 5 Fig. 5.

continet B. Sicuti enim modus quo A continet B, ulterius eſt inexplicabilis, ita planè etiam identitas modi, quo A continet B, cum modo, quo C continet D, ulterius inexplicabilis eſt.

Fig. 5. *Quod verò cuicumque proportioni irrationali A ad B, dabiles ſint infinitæ aliæ proportiones irrationales æquales, majores, minores, diverſis terminis conſtantes, facilè poterimus intelligere hunc in modum. Sumatur quæcunque quantitas C, & auferatur B ex A incommenſurabili ſecum quantitate, quoties poteſt, puta ter: & ſuperſit E F. Sit deinde O tertia pars ipſius C, ſit inſuper quæpiam X ipſi C incommenſurabilis, quæ major ſit quam O. Quoniam igitur A continet B plus quam ter, C vero continet X minus quam ter (nam C continet præciſe ter O minorem quam X) erit ratio irrationalis C ad X minor ratione irrationali A ad B. Accipiatur jam Q, quarta pars C, & quæpiam eſto Z, ipſi C incommenſurabilis, quæ minor ſit quam Q. Quoniam igitur A continet B minus, quam quater; C vero continet Z plus quam quater (cum C præcisè quater contineat, Q majorem quam Z) erit ratio irrationalis C ad Z major ratione irrationali A ad B.*

Fig. 5. *Iam vero, quia C ad aliquam X minorem rationem habet quam A ad B; & rurſum, quia C ad aliquam Z majorem rationem habet quam A ad B; manifeſtum eſt etiam C ad aliquam D mediam inter X & Z, eandem habere rationem quam A ad B. Quod quidem perinde clarum eſt lumine naturali, atque iſtud: dabile eſt majus quam P, & dabile eſt minus quam P, ergo dabile eſt æquale aliquod ipſi P.*

Quid

Quid in proportionum æqualium definitione Euclideâ deſideretur.

Quod ad Euclidem attinet, is duas proportiones A ad B, C ad F æquales eſſe dicit, cum antecedentium quæcunque æquè multiplices I, Q, conſequentium quibuſcunque æquè multiplicibus L, R, vel ſimul majores ſunt, vel ſimul minores, vel ſimul æquales; hoc eſt cum I ſuperante L, etiam Q ſemper ſuperat R; & cum I ſuperatur ab L, etiam Q ſemper ſuperatur ab R; & cum I eſt æqualis L, etiam Q ſemper eſt æqualis R. Vbi benè notandum eſt, Euclidem non aſſumere æquè multiplicium exceſſus defectuſque proportionales, ſeu ſimiles, ſic enim ineptè idem per idem explicaſſet; ſed exceſſus & defectus ſimpliciter. Nihilominus hic aliquid in ſummo Geometrâ deſiderari jam ſupra declaravimus. Nam vel cupit hiſce verbis rationes æquales definire, & ſic rei definitæ proprietatem pro definitione affert; evidens quippe eſt, hanc multiplicium affectionem ex rationum æqualitate profluere; vel adducit tanquam indicium primum & infallibile rationum æqualium; & ſic demonſtrare debuerat, eam cum rationum æqualitate ita ſemper eſſe connexam, ut hæc ex illâ certò poſſit inferri. Quæ quidem connexio & perobſcura & demonſtratu difficilis eſt: vel denique pe rationum æqualitatem nihil aliud intelligit, quam ſimultaneum illum exceſſum defectumve multiplicium; Et ſic toto Fig. 21.

5. ac 6. libro, cum quatuor magnitudines, proportionales eſſe demonſtrat, nihil ſciemus aliud, quàm dictum exceſſum, & defectum illis competere, incerti planè, utrum magnitudines, de quibus agitur, ſint verè proportionales.

Proportionum æqualium aliud indicium primum & infallibile aſſignatur.

Quod ſi rationum æqualium deſideretur indicium infallibile, & facile, & primum; nos tale aſſignabimus, demonſtrabimuſque theor. 5. & 6. partis 2 eſtque ejuſmodi.

Fig. 26. o Majoris inæqualitatis.

Rationes o æquales ſunt (A B ad C F; G M ad N Q) quando & conſequentes ipſæ, & conſequentium ſimiles partes aliquotæ quæcunque in antecedentibus æquali ſemper numero continentur.

Ut ſi una decima ipſius C F contineatur in A B ducenties, una quoque decima N Q contineatur ducenties in G M, & ſi una centeſima C F contineatur millies in A B, etiam una centeſima N Q contineatur millies in G M, & ſic deinceps in infinitum, erit A B ad C F, ut G M ad N Q.

Inæquales autem rationes ſunt, quando aut conſequentes ipſæ, aut conſequentium aliquæ ſimiles aliquotæ in antecedentibus inæquali numero continentur. Et illa ratio major eſt, cujus vel conſequens

quens, vel conſequentis aliquota, ſæpius continetur in antecedente.

Vt ſi una centimilleſima C F ſæpius contineatur in A B, quam una centimilleſima N Q, in G M, erit ratio A B ad C F major ratione G M ad N Q, quamvis innumeræ aliæ conſequentium C F, N Q ſimiles aliquotæ in antecedentibus A B, G M æquali numero continerentur. Fig. 26.

Porro æquali numero contineri dicuntur, cum ablatæ quoties poſſunt, æquali numero ſunt ablatæ.

Ex hoc indicio rationum irrationalium æqualitas & inæqualitas continuò eluceſcit, cum ſic antecedentes conſequentibus incommenſurabiles, per ablata, conſequentibus commenſurabilia & proportionalia exhauriantur.

7. Similes partes ſunt, quæ in ſuis totis æquè, ſeu eodem modo continentur, ut qualis pars ſui totius eſt una, talis pars ſui totius ſit altera. Quod ſanè nihil aliud eſt, quam partes ad ſua tota eandem habere rationem.

Similes vero partes aliquotæ ſunt, quæ ſua tota æqualiter metiuntur: ut ſi utraque ſit ſui totius una tertia, una decima &c. Fig. 6.

8. Magnitudines (A B C D) continuè proportionales dicuntur, cum medii termini (B, C) bis ſumuntur; hoc eſt cum ſunt conſequens reſpectu præcedentis, & antecedens reſpectu ſequentis.

Continuas rationes ſic efferimus, A eſt ad B, ut

B ad

B ad C, & B eſt ad C, ut C ad D, & ſic deinceps.

9. Magnitudines diſcretim proportionales ſunt, cum nullus terminus bis accipitur.

Fig. 1. *Diſcretas rationes ſic efferimus A eſt ad B, ut C ad F. Cum plures fuerint proportionales magnitudines, quam tres, ſi proportionales dicantur, ſemper intelligitur diſcretim.*

Fig. 6. 10. Cum magnitudines (A B C D) fuerint continuè proportionales, prima (A) ad tertiam (C) habere dicitur rationem duplicatam ejus rationis, quam eadem prima (A) habet ad ſecundam (B;) & prima (A) ad quartam (D) rationem habere dicitur triplicatam, ejus, quam eadem prima habet ad ſecundam (B) & ſic deinceps.

11. Homologæ ſeu ſimiles ratione magnitudines dicuntur antecedentes antecedentibus, conſequentes conſequentibus.

Fig. 1. Ut ſi A eſt ad B, ut C ad F; homologæ erunt A, C, & B, F.

Reliquæ definitiones commodiùs ex ipſis propoſitionibus intelligentur.

Quintus liber propoſitiones complectitur 25. Ex his 10. non alium uſum habent, quam ut reliquæ earum ope per multiplices demonſtrentur. Illis igitur prætermiſſis, 15. reliquas proponemus ſolas, Euclidis ordine non mutato. Porro hujus libri theoremata non ſolis lineis, ſed omnibus omnino quantitatibus conveniunt. Lineæ igitur, quibus hic utimur, omne genus quantitatis repræſentant.

Axioma.

Axioma.

DAtis tribus quantitatibus A,B,C,dabilis eſt quarta Z,ad quam C eam proportionem babet, quam A habet ad B.

PROPOSITIO 1. 2. 3. 4. 5. 6.

IN noſtra methodo ſunt ſuperflua.

PROPOSITIO VII.

SI quantitates A & B fuerint æquales & alia quæpiam detur Z: erit A ad Z, ut B eſt ad Z. Fig. 7.

& Z erit ad A, ut eadem Z eſt ad B.

Hæc propoſitio uti & ſequentes quatuor, ſunt meriſſima axiomata, ac proinde nullo modo demonſtrari debent.

PROPOSITIO VIII.

SI quantitates (C & F) fuerint inæquales; major C ad tertiam Z majorem habebit rationem, quam minor F habeat ad eandem Z. Fig. 8.

Et Z ad majorem (minorem habebit rationem, quam eadem Z habeat ad F, quæ minor eſt quam C.

PRO-

PROPOSITIO IX.

Fig. 7.

SI A & B ad Z eandem habeant rationem, æquales ſunt A & B.

Et ſi eadem Z ad A & B eandem rationem habeat, rurſum A & B æquales erunt.

PROPOSITIO X.

Fig. 8.

SI C ad Z majorem rationem habeat, quam F ad Z, erit C major quam F.

Et ſi Z ad F majorem rationem habeat, quam eadem Z ad C, erit F minor quam C.

PROPOSITIO XI.

Fig. 9.

RAtiones, quæ eidem rationi ſunt æquales, eædem, ſimiles, (idem omnia ſignificant) ſunt æquales, eædem, ſimiles inter ſe.

Ut ſi tam ratio A ad B, quam ratio C ad F, ſint æquales rationi X ad Z, erunt quoque rationes A ad B, & C ad F æquales inter ſe. Sive ſi A ſit ad B, ut X ad Z, & C ſit ad F, ut X ad Z: erit quoque A ad B ut C ad F.

Eodem modo rationes, quæ æqualibus ſunt æquales, inter ſe ſunt æquales.

PRO-

PROPOSITIO XII.

SI ſingulæ magnitudines quotcumque (A, B, C.) eandem habuerint proportionem ad ſingulas totidem (F, I, L:) quam proportionem habent ſingulæ ad ſingulas, ſive una (A) ad unam (F;) eandem habebunt omnes (A, B, C) ſimul ſumtæ, ad omnes (F, I, L) ſimul ſumtas. Fig. 10.

Rem per ſe manifeſtam exemplo tantum aliquo rationali declaro; ut ſi ſingulæ A, B, C, ſingularum F, I, L, ſint triplæ (hoc eſt ſi ſingulæ ad ſingulas eandem habeant rationem quam 3. ad 1) etiam A, B, C ſimul ſumtæ, ſimul ſumtarum F, I, L triplæ erunt, (hoc eſt, etiam A, B, C ſimul ſumtæ ad F, I, L ſimul ſumtas rationem habent eandem, quam 3 ad 1. In proportione irrationali res æquè clara eſt.

PROPOSITIO XIII. & XIV.

IN noſtra methodo ſunt ſuperfluæ.

PROPOSITIO XV.

ALiquotæ ſimiles (F, I) eandem inter ſe rationem habent quam tota (A, B.) Fig. 1.

Et

Fig. 11. *Et univerſim partes ſimiles (C,F) ſunt inter ſe ut tota (A,B.)*

Verè inſtar axiomatis haberi poteſt, ſi rectè intelligatur, quid ſint partes ſimiles. Vide defin. 7.

PROPOSITIO XVI.

Fig. 11 vel 1. *SI prima (A) ſit ad ſecundam (B,) ut tertia (C) ad quartam (F;) etiam permutando erit prima (A) ad tertiam (C,) ut ſecunda (F) ad quartam (F.)*

Ponantur B & F eſſe minores quam A & C. nam ſi æquales ſint res patet. Quoniam A ponitur eſſe ad B, ut C ad F, erunt per defin. 7. B & F, totorum A & C partes ſimiles, ac proinde per præced. quam proportionem inter ſe habent tota A, C, eam quoque habent partes ſimiles B, F; hoc eſt, A eſt ad C, ut B ad F.

Scholium.

SI A eſt ad B, ut C ad F, etiam invertendo erit ut B ad A, ſic F ad C. Per ſe patet.

Apud Euclidem hoc eſt corollarium prop. 4. quæ cum in noſtra methodo tanquam ſuperflua, ſit omiſſa, viſum eſt corollarium illud hoc loco ponere.

PRO-

PROPOSITIO XVII.

SI antecedens unum (AB) ſit ad conſequens (CB,) ut antecedens alterum (FI) ad conſequens alterum (LI;) etiam dividendo erit (AC) exceſſus antecedentis primi ſupra ſuum conſequens, ad idem conſequens (CB,) ut (FL) exceſſus antecedentis ſecundi ſupra conſequens ſecundum, ad ſecundum conſequens (LI.) Fig. 12.

Axiomatis inſtar aſſumi poteſt: ſi tota AB, FI eandem rationem habeant, ad X & Z, etiam ſimilibus partibus mulctata eandem ad X & Z pergent habere rationem: hoc eſt, adhuc AB ſic mulctata erit ad X, ut FI ſic mulctata ad Z. Id vero eſt quod aſſerit propoſitio. Nam quia ponitur AB eſſe ad CB, ut FI ad LI, erunt a CB, LI ſimiles partes totorum AB, FI; & AC, FL, erunt tota ſimilibus partibus mulctata. Cum ergo tota habuerint ad CB, LI, eandem rationem, etiam AC, FL, (hoc eſt tota ſimilibus partibus mulctata) pergent ad CB, LI eandem inter ſe habere rationem, hoc eſt adhuc erit AC ad CB, ut FL ad LI.

a Per def. 7. l. 5.

PRO-

PROPOSITIO XVII.

Fig. 12. *SI antecedens unum (A C) ſit ad conſequens unum (C B,) ut antecedens alterum (F L) ad conſequens alterum (L I;) etiam componendo erit (A C cum BC) primum antecedens cum ſuo conſequente, ad idem conſequens (C B,) ut (F L cum L I) ſecundum antecedens cum ſuo conſequente, ad conſequens (L I.)*

Rurſum enim inſtar axiomatis aſſumi poterit: ſi duæ quantitates A C, F L, eandem ad X & Z habeant rationem, etiam A C, F L ſimiliter, ſeu proportionaliter auctæ pergent ad X & Z eandem habere rationem: hoc eſt adhuc erit A C ſic aucta ad X, ut F L ſic aucta ad Z. Id verò eſt quod propoſitio aſſerit. Nam ponitur A C eſſe ad C B, ut, F L, ad L I. Quare ſi ipſis A C, F L, addantur C B, L I; erunt A C, F L proportionaliter, ſeu ſimiliter auctæ. Cum igitur AC, FL eodem modo ſe habeant ad C B, L I, etiam cum ſimiliter fuerint auctæ (hoc eſt ipſæ jam A B, FI) pergent ad eaſdem C B, L I eodem modo ſe habere; hoc eſt adhuc A B erit, ad C B, ut F I ad L I.

Corol-

Corollarium. I.

SI antecedens unum (A B) fuerit ad conſequens (C B) ut antecedens alterum (F I) ad conſequens alterum (L I) etiam antecedens primum (A B) erit ad (A C,) exceſſum ſuum ſupra conſequens, ut antecedens alterum (F I) eſt ad (F L) exceſſum ſuum ſupra conſequens alterum (L I.) *Fig. 12.*

Cum enim A B ſit ad C B, ut F I ad L I, erit dividendo *a* A C ad C B, ut F L ad L I: & inuertendo *b* B C ad C A, ut I L ad L F: & componendo *c* B A ad C A, ut I F ad L F.

a Per 17. l. 5.
b Per ſchol. p. 16. l. 5.
c Per 18. l. 5.

Hæc argumentatio vocatur converſio rationis.

Corollarium 2.

SI A C eſt ad A B, ut F L ad F I, erit quoque A C ad C B, ut F L ad L I; & A B ad C B, ut F I ad L I. *Fig. 12.*

Cum enim ſit ut A C ad A B, ſic F L ad F I, erit invertendo B A ad C A, ut I F ad L F: & diuid. *d* B C ad C A, ut I L ad L F: & rurſum invertendo A C ad C B, ut F L ad L I: & compon. *e* A B ad C B, ut F I ad L I.

d Per 17. l. 5.
e Per 18. l. 5.

PROPOSITIO XIX.

SI ut totum (A B) eſt ad totum (F I,) ita ablatum (C B) ſit ad ablatum (L I,) *Fig. 12.*

 etiam

etiam ut totum eſt ad totum, ita reliquum (A C) erit ad reliquum (F L.)

Omnino clarum eſt per ſe. Poteſt tamen ex præcedentibus ſic oſtendi: quoniam A B eſt ad F I, ut C B ad L I, erit permutando *a* A B ad C B, ut F I ad L I. Ergo per converſionem rationis A B eſt ad A C, ut *b* F I ad F L. Ergo permutando *c* ut A B ad F I, ita A C ad F L.

a *Per 16. l. 5.*
b *Per corol. 1. præced.*
c *Per 16. l. 5.*

PROPOSITIO XX. XXI.

In noſtra methodo ſunt ſuperflua.

PROPOSITIO XXII.

Fig. 13.

Si fuerit A ad B, ut O ad Q; & B ad C, ut Q ad R, & ſic deinceps: erit ex æquo ut A prima ad C ultimam, ita O prima ad ultimain R.

Ponantur C, R eſſe minores quam B, Q: eadem foret oſtenſio, ſi majores ponerentur. Quoniam *a* B eſt ad C, ut Q ad R, erunt C, R totorum B, Q, *b* partes ſimiles, Cum igitur A, & O ad B & Q, eandem habeant rationem, habebunt quoque ad C & R, quæ ſunt ipſorum, B, & Q partes ſimiles, eandem rationem. Inſtar enim axiomatis eſt, ſi duæ quantitates ad alias duas eandem inter ſe habuerint

a *Per hyp.*
b *Per defin. 7. l. 5.*

habuerint rationem, etiam ad partes earum ſimiles, eandem inter ſe habere rationem.

Si plures fuerint utrimque qnantitates quam tres, eodem ratiocinio procedatur ad reliquas.

PROPOSITIO XXIII.

Fig. 14.

SI fuerit ut A prima ad B ſecundam, ita O prima ad Q ſecundam, & ut B ſecunda ad C tertiam, ita tertia quæpiam R ad primam O; erit ex æquo ut A prima ad C tertiam, ita R tertia ad Q ſecundam.

Ut B eſt ad C, ita *o* poteſt Q eſſe ad *o Per axio. ante 1. l. 5.*
aliam quampiam S. Jam quia ut B ad C, ſic *p Per hyp.*
p R eſt ad O, & ut B ad C *q* ſic Q eſt ad S; *q Per conſtr.*
erit R ad O, *a* ut Q ad S. Igitur permutan- *a Per 11. l. 5.*
do *b* R eſt ad Q, ut O ad S. Deinde, quia *b Per 16. l. 5.*
O eſt ad Q, ut *f* A ad B, & Q eſt ad S, *i* ut *f Per hyp.* *i Per conſtr.*
B ad C; ex æquo erit O ad S ut *c* A eſt ad *c Per prac.*
C. Sed jam oſtendi R eſſe ad Q, ut O eſt *d Per 11. l. 5.*
ad S. Ergo etiam *d* R eſt ad Q, ut A ad C.

Vocatur à Geometris hæc ratio perturbata.

PROPOSITIO XXIV.

Fig. 15.

SI fuerit ut A ad B, ita C ad F; & ut I ad B, ita L ad F: erit ut A cum I ad B, ita C cum L ad F.

a Per ſchol. p. 10. l. 5.
b Per hyp.
c Per 22. l. 5.
d Per 18. l. 5.
e Per hyp.
f Per 22. l. 5.

Quoniam I per hyp. eſt ad B, ut L ad F, erit quoque *a* invertendo B ad I, ut F ad L. Cum igitur A ſit ad B, *b* ut C ad F, & B ad I, ut F ad L; ex æquo erit *c* ut A ad I, ſic C ad L. Igitur *d* componendo ut A I eſt ad I, ſic C L eſt ad L: I verò eſt ad B, *e* ut L ad F. Rurſum igitur *f* ex æquo A I eſt ad B, ut C L ad F.

PROPOSITIO XXV.

Fig. 16.

S*I quatuor magnitudines (A B, C F, I, L) fuerint proportionales, maxima (A B) & minima (L) duabus reliquis (C F I) majores erunt.*

a Per 19. l. 5.
b Per hyp.

Sit A B ad C F, ut I ad L. Ex maxima A B ſumatur A Q æqualis I; & ex C F ſumatur C R par minimæ L. Erit igitur A B tota ad totam C F, ut ablata A Q ad ablatam C R. Ergo reliqua Q B eſt ad reliquam *a* R F, ut tota A B ad totam C F. Sed A B major *b* eſt quam C F. Ergo & Q B major quam R F. Jam vero quia A Q ipſi I, & C R ipſi L, æquales ſunt, etiam A Q cum L, ipſi I cum C R æquales erunt. Quare ſi ad A Q cum L, addatur majus Q B, & ad I cum C R addatur minus R F, erit totum A Q B cum L, majus toto, I, cum C R F. Quod erat demonſtrandum.

Quæ ſequuntur non ſunt proportiones Euclidis, ſed ex Pappo Alexandrino, aliiſque deſumtæ ob frequentem earum uſum Euclidæis ſubjungi ſolent.

PROPOSITIO XXVI.

SI prima (A) ad ſecundam (B) majorem rationem habeat, quam tertia (C) ad quartam (F;) habebit invertendo (B) ſecunda ad (A) primam, minorem rationem, quam (F) quarta ad (C) tertiam, Fig 17.

Quoniam ponitur A habere ad B majorem rationem, quam C ad F. Igitur A ad *o* aliquam B X (quæ *a* major erit quam B) eandem habebit rationem, quam C ad F. Invertendo igitur erit B X ad A, ut F ad C, ac proinde *b* B ad A in minori ratione erit, quam F ad C.

o Per axio. ante 1. l. 5.
a Per 10. l. 5.
b Per 8. l. 5.

PROPOSITIO XXVII.

SI A habet ad B majorem rationem quam C ad F, etiam permutando A ad C majorem rationem habebit, quam B ad F. Fig. 17.

Quoniam ratio A ad B ponitur major ratione C ad F, erit *o* ratio A ad aliam B X (quæ neceſſario major eſt quàm *a* B) æqualis

o Per axio. ante 1. l. 5.
a Per 10. l. 5.

b Per 16. l. 5. lis rationi C ad F. Jam igitur *b* permutando A erit ad C; ut B X ad F. Sed B X
c Per. 8. l. 5. ad F eſt in majori ratione, *c* quam B ad F. Ergo etiam A eſt ad C in majori, quam B ad F.

Idem ſimiliter demonſtrabitur de proportione minori.

PROPOSITIO XXVIII.

Fig. 18. *SI A B ad B C majorem rationem habet, quam F I ad I L; etiam componendo A C, ad B C majorem rationem habet, quam F L ad I L.*

Quoniam ponitur A B ad B C eſſe in
b Per axio. ante 1, l. 5. majori ratione, quam F I ad I L. Ergo *a* alia
O B (quæ neceſſario erit minor, *a* quam
a Patet ex 10. l. 5. A B) eſt ad B C, ut F I ad I L. Ergo *b* com-
b Per 18. l. 5. ponendo O C eſt ad B C, ut F L ad I L.
c Per 8. L. 5. Ergo A C eſt ad B C in *c* majori, quam F L ad I L.

Idem ſimiliter demonſtrabitur de proportione minori.

PROPOSITIO XXIX.

Fig. 18. *SI A C ad B C majorem rationem habet, quam F L ad I L; etiam dividendo A B ad B C majorem habet rationem: quam F I ad I L.*

Quia

Quia ponitur A C ad B C majorem habere rationem, quam F L ad I L; ergo *o* alia O C (quæ neceſſario minor erit, *a* quam A C) erit ad B C, ut F L ad I L, Iam igitur erit dividendo *b* O B ad B C, ut F I ad I L. Ergo A B eſt ad B C in *c* majori, quam F I ad I L.

o *Per axio. ante 1. l. 5.*
a *Per 10. l. 5.*
b *Per 17. l. 5*
c *Per 8. l. 5.*

Idem ſimiliter demonſtrabitur de proportione minori.

PROPOSITIO XXX.

SI A C ad B C majorem rationem habet, quam F L, ad I L; convertendo habebit A C ad A B minorem, quam F L ad F I. *Fig. 18.*

Quoniam A C eſt ad B C in majori quam F L ad I L, erit dividendo *a* A B ad B C in majori, quam F I ad I L. Ergo invertendo *b* C B ad B A, eſt in minori, quam L I ad I F. Ergo componendo *c* C A eſt ad B A in minori, quam L F ad I F.

a *Per 29. l. 5.*
b *Per 26. l. 5.*
c *Patet ex 28. l. 5.*

PROPOSITIO XXXI,

SI A B ad C majorem rationem habeat, quam F ad I; & C ad L Q majorem rationem habeat, quam I ad S, & ſic deinceps; etiam prima A B ad *Fig. 19.*

 ulti-

ultimam L Q majorem rationem habebit, quam prima F ad ultimam S.

Quoniam A B eſt ad C in majori quam F ad I; Ergo alia *o* quæpiam OB (quæ neceſſario minor *a* erit quam AB) eſt ad C, ut F ad I. Et quia C eſt ad L Q in majori quam I ad S; Ergo C ad aliam quampiam L R (quæ erit neceſſario major quam LQ) eſt ut I ad S. Igitur ex æquo *c* O B eſt ad L R ut F ad S. Ergo O B eſt ad L Q in majori quam *d* F ad S. Ergo A B eſt ad L Q *e* in multo majori, quam F ad S.

o Per axio
a Per 10. l. 5.
c Per 22. l. 5.
d Per 8 l. 5.
e Per eand.

PROPOSITIO XXXII.

Fig. 19.

SI A B ad C majorem rationem habet, quam I ad S; & C ad L Q majorem quam F ad I, etiam ex æquo habebit majorem rationem A B ad L Q, quam F ad S.

Demonſtratio eadem quæ præcedentis, ſed pro 22. citetur 23.

PROPOSITIO XXXIII.

Fig. 12.

SI tota (A B) ad totam (F I) majorem rationem habuerit, quam ablata (C B) ad ablatam (L I,) tota ad totam minorem rationem habebit, quam reliqua (A C) ad reliquam (F L.)

Quia

Quia A B eſt ad F I in majori, quam C B ad L I; erit *a* permutando etiam A B ad C B in majori quam F I ad L I. Ergo convertendo *b* A B eſt ad A C in minori, quam F I ad F L: Ergo etiam permutando *c* A B eſt ad F I, in minori, quam A C ad F L.

a Per 27. l. 5.

b Per 30. l. 5.

c Patet ex 27. l. 5.

PROPOSITIO XXXIV.

SI rationes (A ad C, & E ad O) ſunt æqualium rationum (A ad B & E ad F) duplicatæ, aut triplicatæ & ſic deinceps, æquales ſunt etiam ipſæ.

Fig. 19.

Quia ratio A ad C duplicata eſt rationis A ad B, erit *a* ut A ad B, ſic B ad C. Ob eandem cauſam erit ut E ad F, ſic F, ad O. Cum ergo ſit ut A ad B, ſic per hyp. E ad F; & ut B ad C, ſic F ad O (nam ut B ad C, ſic A ad B, hoc eſt E ad F, hoc eſt F ad O) igitur *b* ex æquo erit, ut A ad C, ſic E ad O.

a Per defin. 10. l. 5.

b Per 22. l. 5.

PROPOSITIO XXXV.

RAtiones æquales A ad C & E ad O, ſint duplicatæ, aut triplicatæ, et ſic deinceps, rationum A ad B, & E ad F; etiam hæ æquales erunt.

Fig. 20.

Si negas, ſit ut A ad B, ſic E ad aliam Z inæqualem ipſi F, & fiat ut E ad Z, ſic Z

ad

ad X. Quoniam igitur rationum æqualium A ad B, & E ad Z duplicatæ *c* ſunt rationes A ad C, & E ad X, etiam ratio E ad X, æqualis erit *d* rationi A ad C, hoc eſt per hyp. rationi E ad O. Ergo *e* æquantur O & X. Ergo patet etiam medias F & Z æquales eſſe. Ergo A eſt ad B, ut E ad F ſeu Z. Quod erat demonſtrandum.

c Per defin. 10. l. 5.
d Per præc.
e Per 9. l. 5.

Ex contradictorio aſſertionis directè illata eſt aſſertio.

PARS SECUNDA.

Euclidæa per multiplices definitio æqualium rationum, demonſtratur, exhibeturque ac demonſtratur aliud magis immediatum, & facilius indicium æqualitatis rationum.

Proportionum elementis methodo (niſi fallor) commodiori explicatis, reliquum eſt, ut quod ſecundo loco ſupra promiſeram, præſtare aggrediar. Hoc igitur loco (quod à nullo hactenus factum eſt) demonſtrabimus, nihil aſſumendo, niſi quod per ſe lumine naturali ſit manifeſtum, duas rationes inter ſe æquales eſſe, quando antecedentium quælibet æquè multiplices, conſequentium æque multiplicibus, ſemper ſunt vel pariter majores, vel pariter minores, vel pariter æquales. Cujus quidem negotii cùm ſatis ardua, atque prolixa ſit

ſit demonſtratio, ut jam reipſa cognoſcemus, facilè apparebit præpoſtere egiſſe Euclidem, qui æqualitatis rationum primum, & fundamentale indicium ſumi voluit hac multiplicium in demonſtratâ hactenus proprietate, cujus tam remota & obſcura ſit cum rationum æqualitate connexio.

Lemma 1.

SIt *A* ad *B*, *ut C ad F; & ſint antecedentium, A, C, quælibet æquè multiplices I, Q, nimirum vel duplæ, vel triplæ & ſic deinceps. Sint item conſequentium B, F quælibet æquè multiplices L, R.* Fig. 21.

Erit quoque ut I ad L, ſic Q ad R.

Quoniam enim A eſt ad B, ut C ad F, etiam I dupla ipſius A erit ad B, ut Q dupla ipſius C eſt ad F: &, I, tripla A erit ad B, ut Q tripla C, ad F. Et ſic in infinitum. Quod quidem æquè eſt per ſe clarum ac quodlibet axioma. Quoniam igitur I eſt ad B, ut Q ad F, erit quoque I ad L duplam ipſius B, ut Q ad R duplam ipſius F; & ut I ad L triplam ipſius B, ita Q ad R triplam F: Et ſic in infinitum, quod rurſus tam clarum eſt, quam axioma quodcunque. Liquet ergo propoſitum.

Lemma 2.

SI *quantitates A, B habeant communem menſuram C; erit A toties ſumta, quoties eſt C in B, æqualis quantitati B toties ſumtæ, quoties C eſt in A.* Fig. 22.

Bona-

Ponatur C contineri in B quater; & in A ſexies, ac proinde B eſſe 4. C, & A eſſe 6. C. Igitur 6. C (hoc eſt A) ducta in 4. C (hoc eſt toties ſumta quoties C eſt in B) efficiunt 24. C. Similiter 4. C (hoc eſt B) ducta in 6. C (hoc eſt toties ſumta quoties C eſt in A) efficiunt etiam 24. C. Ergo A toties ſumta quoties C in B, æquatur B toties ſumtæ quoties C in A.

Theorema I.

Fig. 23. *SI ratio A B ad F I major ſit ratione L ad R, tales ſumi poſſunt antecedentium (A B & L) æquè multiplices, tales item æquè multiplices conſequentium (F I, & R,) ut multiplâ antecedentis A B rationis majoris excedente multiplam conſequentis (F I) multiplex antecedentis L, rationis minoris non excedat multiplicem ſui conſequentis (R.)*

Sit ratio A B ad F I major ratione L ad R, & ſint AB, & L, majores rationum termini. Quoniam igitur A B ad F I majorem habet rationem quàm L ad R; a alia quædam quantitas Z a habebit ad F I eandem rationem, quam L ad R. Quia jam igitur ratio Z ad F I æqualis eſt rationi L ad R, poniturque ratio A B ad F I major ratione L ad R, erit

a Per axiomate 1. l. 5.

quo-

quoque ratio A B ad F I major ratione Z ad F I; ac proinde A B major eſt quam Z: quæ omnia per ſe ſunt manifeſta. Igitur ex A B ſumi poterit A C per Z, eritque etiam A C ad F I, ut L ad R. Auferatur reſiduum B C ex A C quoties poteſt, puta ter; tum ſeca A C in tot æquales partes exem. gr. in 6. donec earum una poſſit auferri ſæpius ex F I, quam B C ex A C, puta quater, & reſiduum eſto O I, quod erit minus unâ particulâ. Hoc quoque fieri poſſe per ſe eſt manifeſtum, & patet ex p. 1. l. 10. quæ à proportionibus non dependet. Particularum vero illarum quantitas eſto Q.

Quoniam igitur Q eſt menſura communis quantitatum A C, F O, ergo A C toties ſumta, quoties Q eſt in F O, nempe quater, æquatur F O toties ſumtæ, quoties Q eſt in A C, nempe ſexies. Deinde quia reſiduum O I eſt minus unâ particulâ, hoc eſt quam Q, erit O I toties accepta, quoties Q eſt in A C, nempe ſexies, adhuc minor quam A C. Ulterius quia B C minus ſæpè auferri poteſt ex A C, quam Q, ex F I (poſitum quippe fuit B C ex A C auferri tantum poſſe ter, Q vero quater ex F I.) Manifeſtum eſt B C toties ſumtum, quoties Q in F I, nempe quatur, majus fore quam A C, ac proinde multo majus eſſe quam O I ſumtum ſexies, quod oſtendi ſupra eſſe minus quam A C. Atqui oſtenſum eſt A C ſumtum quater, & F O ſumtum ſexies eſſe æqualia. Quare ſi A C ſumto quater addatur B C quater, & ad F O ſexies ſumtum addatur O I ſexies, erunt 4. A C & 4. B C, hoc eſt 4. A B majora, quam 6. F O & 6. O I, hoc eſt quam 6. F I.

6. F I. Quia vero 4. A C æqualia erant 6. F O; erunt 4. A C minora 6. F I. Sed ut A C ad F I, ita ponebatur ſupra L eſſe ad R. Ergo per lem. 1. etiam 4. L minora ſunt quam 6. R. Acceptæ ſunt igitur antecedentium A B, & L æquè multiplices, nempe quadruplæ, item æquè multiplices conſequentium F I & R, nempe ſecuplæ, & tamen oſtenſum eſt multiplam antecedentis A B (nempe 4. A B) ſuperare multiplicem conſequentis F I (nempe 6. F I:) multiplicem vero antecedentis L (nempe 4. L) non excedere multiplicem conſequentis R (nempe 6. R.) Quod erat demonſtrandum.

Theorema 2.

Fig. 21. SI antecedentium (A, C) qualibet æquè multiplices, quibuſlibet conſequentium (B, F) æquè multiplicibus, ſint vel ſimul majores, vel ſimul minores, vel ſimul æquales, ratio (A ad B) rationi (C ad F) æqualis erit.

Si negas, ſit ratio A ad B major ratione C ad F. Ergo per theor. præced. poterunt antecedentium A, C ſumi tales æquè multiplices, item tales conſequentium B, F æquè multiplices, ut multiplâ antecedentis A excedente multiplam conſequentis B, multipla antecedentis C non excedat multiplam conſequentis F, quod eſt abſurdum, quia evertit hypotheſim. Ergo &c.

In hac demonſtratione, uti & in ſequentibus ea ſolum propoſitiones ex quinto libro adhibentur, quæ per ſe æquè ſunt manifeſtæ, atque ipſa axiomata.

Theorema 3.

SI ſumi poſſint antecedentium (O, R) tales æquè multiplices, itemque tales æquè multiplices conſequentium (Q, S,) ut multiplâ antecedentis unius (O) ſuperante multiplam conſequentis (Q,) multipla antecedentis alterius (R) non excedat multiplam ſui conſequentis (S;) erit ratio (O ad Q,) cujus antecedentis multiplex ſuperat multiplicem conſequentis, major ratione alterâ (R ad S.) Fig. 24.

Rationes illas inæquales eſſe ſic oſtendo. Si eſſent æquales; quæcunque antecedentium æquè multiplices (ut patet à fortiori ex lemmate primo) quibuſcunque æquè multiplicibus conſequentium vel ſimul majores eſſent, vel ſimul minores, quod eſt abſurdum, quia everiit hypotheſin.

Quod autem Ratio O ad Q major ſit, cujus antecedentis multiplex ſuperat, ſic oſtendo. Si negas, ſit ratio R ad S major ratione O ad Q. Ergo per theor. 1. tales accipi poſſunt antecedentium R & O æque multiplices, taleſque item æquè multiplices conſequentium S & Q, ut multiplâ antecedentis R rationis

tionis majoris excedente multiplam conſequenti S, multipla antecedentis O non excedat multiplam conſequentis Q: non autem tales (quod facilè ex 1. lem. oſtenditur) ut multipla O excedente multiplam Q multipla R non excedat multiplam S. Quod eſt abſurdum, cum evertat hypotheſim.

Theorema 4:

Fig. 25.

Cum proportio irrationalis eſt, nulla multiplex antecedentis ulli conſequentis multiplici æqualis eſſe poteſt. Quare, cum per multiplices inquiritur proportionum irrationalium æqualitas, ſolummodo multiplicium ſimultaneus exceſſus, defectuſque ſpectari debent.

Sit proportio irrationalis A ad B. Si A aliquoties ſumta poſſet fieri æqualis B aliquoties ſumtæ, ac proinde eandem ambæ efficere quantitatem Z: ſingulæ A & B eſſent eidem Z commenſurabiles, ac proinde & commenſurabiles inter ſe, contra hypotheſim.

Quia tamen ſecundum theorema tam ad rationales proportiones pertinet, quam ad irrationales, ſimultaneo exceſſui & defectui, æqualitatem ſimultaneam addidimus cum Euclide.

Demonſtratis hunc in modum, quæ ab Euclide def. 5. & 6. ponuntur, jam omnes ejus quinti & ſexti libri demonſtrationes ſubſiſtunt: patetque multiplicium illum exceſſum defectumque ſimultaneum, infalli-

bile

bile indicium eſſe æqualitatis rationum, non quidem per ſe immediatè, ſed demonſtratione, quam modo dedimus, priùs ritè intellectâ.

Verum quia indicium per multiplices, quantumvis jam ſecurum, nihilominus remotum eſt & implexum, hîc aliud clariſſimum & proximum, quod promiſi ſupra, demonſtrabo:

Theorema 5.

SI conſequentes (C F, N Q) & conſequentium qualibet aliquota ſimiles (puta et decimæ et centeſimæ et milleſimæ, & ita deinceps ſine termino) in antecedentibus (A B, G M) æquali ſemper numero contineantur; rationes (A B ad C F: & G M ad N Q) æquales erunt. Fig. 26.

Nota æquali numero continuari dicuntur, cum, ſi auferantur quoties poſſunt, æqualis eſt utrimque numerus ablatarum.

Demonſt. Si negas, erit ratio alterutra, putà A B, ad C F, major ratione G M ad N Q. Quoniam igitur A B ponitur ad C F majorem habere rationem quam G M ad N Q, manifeſtum eſt aliquam (puta A D) minorem quam A B, æqualem habere rationem ad C F, quam G M ad N Q. Manifeſtum ſimiliter eſt, aliquam ipſius C F aliquotam (ex. gr.

 unam

etiam ut totum eſt ad totum, ita reliquum (A C) erit ad reliquum (F L.)

Omnino clarum eſt per ſe. Poteſt tamen ex præcedentibus ſic oſtendi: quoniam
a Per 16. l. 5. A B eſt ad F I, ut C B ad L I, erit permutando *a* A B ad C B, ut F I ad L I. Ergo
b Per corol. 1. præced. per converſionem rationis A B eſt ad A C, ut *b* F I ad F L. Ergo permutando *c* ut A B
c Per 16. l. 5. ad F I, ita A C ad F L.

PROPOSITIO XX. XXI.

IN noſtra methodo ſunt ſuperflua.

PROPOSITIO XXII.

Fig. 13.

SI fuerit A ad B, ut O ad Q; & B ad C, ut Q ad R, & ſic deinceps: erit ex æquo ut A prima ad C ultimam, ita O prima ad ultimam R.

Ponantur C, R eſſe minores quam B, Q: eadem foret oſtenſio, ſi majores ponerentur. Quoniam *a* B eſt ad C, ut Q ad R, erunt
a Per hyp. C, R totorum B, Q, *b* partes ſimiles, Cum
b Per defin. 7. l. 5. igitur A, & O ad B & Q, eandem habeant rationem, habebunt quoque ad C & R, quæ ſunt ipſorum, B, & Q partes ſimiles, eandem rationem. Inſtar enim axiomatis eſt, ſi duæ quantitates ad alias duas eandem inter ſe habuerint

habuerint rationem, etiam ad partes earum ſimiles, eandem inter ſe habere rationem.

Si plures fuerint utrimque qnantitates quam tres, eodem ratiocinio procedatur ad reliquas.

PROPOSITIO XXIII.

SI fuerit ut A prima ad B ſecundam, ita O prima ad Q ſecundam, & ut B ſecunda ad C tertiam, ita tertia quæpiam R ad primam O; erit ex æquo ut A prima ad C tertiam, ita R tertia ad Q ſecundam. Fig. 14.

Ut B eſt ad C, ita *o* poteſt Q eſſe ad o *Per axio. ante* 1. *l.* 5.
aliam quampiam S. Jam quia ut B ad C, ſic p *Per hyp.*
p R eſt ad O, & ut B ad C *q* ſic Q eſt ad S; q *Per conſtr.*
erit R ad O, *a* ut Q ad S. Igitur permutan- a *Per* 11. *l.* 5.
do *b* R eſt ad Q, ut O ad S. Deinde, quia b *Per* 16. *l.* 5.
O eſt ad Q, ut *f* A ad B, & Q eſt ad S, *i* ut f *Per hyp.* i *Per conſtr.*
B ad C; ex æquo erit O ad S ut *c* A eſt ad c *Per prac.*
C. Sed jam oſtendi R eſſe ad Q, ut O eſt d *Per* 11. *l.* 5.
ad S. Ergo etiam *d* R eſt ad Q, ut A ad C.

Vocatur à Geometris hæc ratio perturbata.

PROPOSITIO XXIV.

SI fuerit ut A ad B, ita C ad F; & ut I ad B, ita L ad F: erit ut A cum I ad B, ita C cum L ad F. Fig. 15.

Quoniam I per hyp. eſt ad B, ut L ad F, erit quoque *a* invertendo B ad I, ut F ad L. Cum igitur A ſit ad B, *b* ut C ad F, & B ad I, ut F ad L; ex æquo erit *c* ut A ad I, ſic C ad L. Igitur *d* componendo ut A I eſt ad I, ſic C L eſt ad L: I verò eſt ad B, *e* ut L ad F. Rurſum igitur *f* ex æquo A I eſt ad B, ut C L ad F.

a Per ſchol. p. 10. l. 5.
b Per hyp.
c Per 22. l. 5.
d Per 18. l. 5.
e Per hyp.
f Per 22. l. 5.

PROPOSITIO XXV.

Fig. 16.

SI quatuor magnitudines (A B, C F, I, L) fuerint proportionales, maxima (A B) & minima (L) duabus reliquis (C F I) majores erunt.

Sit A B ad C F, ut I ad L. Ex maxima A B ſumatur A Q æqualis I; & ex C F ſumatur C R par minimæ L. Erit igitur A B tota ad totam C F, ut ablata A Q ad ablatam C R. Ergo reliqua Q B eſt ad reliquam *a* R F, ut tota A B ad totam C F. Sed A B major *b* eſt quam C F. Ergo & Q B major quam R F. Jam vero quia A Q ipſi I, & C R ipſi L, æquales ſunt, etiam A Q cum L, ipſi I cum C R æquales erunt. Quare ſi ad A Q cum L, addatur majus Q B, & ad I cum C R addatur minus R F, erit totum A Q B cum L, majus toto, I, cum C R F. Quod erat demonſtrandum.

a Per 19. l. 5.
b Per hyp.

Qua

Quæ ſequuntur non ſunt proportiones Euclidis, ſed ex Pappo Alexandrino, aliiſque deſumtæ ob frequentem earum uſum Euclidæis ſubjungi ſolent.

PROPOSITIO XXVI.

SI prima (A) ad ſecundam (B) majorem rationem habeat, quam tertia (C) ad quartam (F;) habebit invertendo (B) ſecunda ad (A) primam, minorem rationem, quam (F) quarta ad (C) tertiam, Fig. 17.

Quoniam ponitur A habere ad B majorem rationem, quam C ad F. Igitur A ad *o* aliquam B X (quæ *a* major erit quam B) eandem habebit rationem, quam C ad F. Invertendo igitur erit B X ad A, ut F ad C, ac proinde *b* B ad A in minori ratione erit, quam F ad C.

o *Per axio. ante 1. l. 5.*
a *Per 10. l. 5.*
b *Per 8. l. 5.*

PROPOSITIO XXVII.

SI A habet ad B majorem rationem quam C ad F, etiam permutando A ad C majorem rationem habebit, quam B ad F. Fig. 17.

Quoniam ratio A ad B ponitur major ratione C ad F, erit *o* ratio A ad aliam B X (quæ neceſſario major eſt quam *a* B) æqualis

o *Per axio. ante 1. l. 5.*
a *Per 10. l. 5.*

b Per 16. l. 5. lis rationi C ad F. Jam igitur *b* permutando A erit ad C; ut B X ad F. Sed B X ad F eſt in majori ratione, *c* quam B ad F. Ergo etiam A eſt ad C in majori, quam B ad F.

c Per. 8. l. 5.

Idem ſimiliter demonſtrabitur de proportione minori.

PROPOSITIO XXVIII.

Fig. 18.

SI A B ad B C majorem rationem habet, quam F I ad I L; etiam componendo A C, ad B C majorem rationem habet, quam F L ad I L.

Quoniam ponitur A B ad B C eſſe in majori ratione, quam F I ad I L. Ergo *o* alia O B (quæ neceſſario erit minor, *a* quam A B) eſt ad B C, ut F I ad I L. Ergo *b* componendo O C eſt ad B C, ut F L ad I L. Ergo A C eſt ad B C in *c* majori, quam F L ad I L.

o Per axio. ante 1, l. 5.
a Patet ex 10. l. 5.
b Per 18. l. 5.
c Per 8. l. 5.

Idem ſimiliter demonſtrabitur de proportione minori.

PROPOSITIO XXIX.

Fig. 18.

SI A C ad B C majorem rationem habet, quam F L ad I L; etiam dividendo A B ad B C majorem habet rationem: quam F I ad I L.

Quia

Quia ponitur A C ad B C majorem habere rationem, quam F L ad I L; ergo *o* alia O C (quæ neceſſario minor erit, *a* quam A C) erit ad B C, ut F L ad I L, Iam igitur erit dividendo *b* O B ad B C, ut F I ad I L. Ergo A B eſt ad B C in *c* majori, quam F I ad I L.

o *Per axio. ante 1. l. 5.*
a *Per 10. l. 5.*
b *Per 17. l. 5*
c *Per 8. l. 5.*

Idem ſimiliter demonſtrabitur de proportione minori.

PROPOSITIO XXX.

SI A C ad B C majorem rationem habet, quam F L, ad I L; convertendo habebit A C ad A B minorem, quam F L ad F I.

Fig. 18.

Quoniam A C eſt ad B C in majori quam F L ad I L, erit dividendo *a* A B ad B C in majori, quam F I ad I L. Ergo invertendo *b* C B ad B A, eſt in minori, quam L I ad I F. Ergo componendo *c* C A eſt ad B A in minori, quam L F ad I F.

a *Per 29. l. 5.*
b *Per 26. l. 5.*
c *Patet ex 28. l. 5.*

PROPOSITIO XXXI,

SI A B ad C majorem rationem habeat, quam F ad I; & C ad L Q majorem rationem habeat, quam I ad S, & ſic deinceps; etiam prima A B ad ulti-

Fig. 19.

ultimam L Q majorem rationem habebit, quam prima F ad ultimam S.

Quoniam A B eſt ad C in majori quam F ad I; Ergo alia *o* quæpiam OB (quæ neceſſario minor *a* erit quam AB) eſt ad C, ut F ad I. Et quia C eſt ad L Q in majori quam I ad S; Ergo C ad aliam quampiam L R (quæ erit neceſſario major quam L Q) eſt ut I ad S. Igitur ex æquo *c* O B eſt ad L R ut F ad S. Ergo O B eſt ad L Q in majori quam *d* F ad S. Ergo A B eſt ad L Q *e* in multo majori, quam F ad S.

o Per axio. *a Per 10. l. 5.* *c Per 22. l. 5.* *d Per 8 l. 5.* *e Per eand.*

PROPOSITIO XXXII.

Fig. 19.

SI A B ad C majorem rationem habet, quam I ad S; & C ad L Q majorem quam F ad I, etiam ex æquo habebit majorem rationem A B ad L Q, quam F ad S.

Demonſtratio eadem quæ præcedentis, ſed pro 22. citetur 23.

PROPOSITIO XXXIII.

Fig. 12.

SI tota (A B) ad totam (F I) majorem rationem habuerit, quam ablata (C B) ad ablatam (L I,) tota ad totam minorem rationem habebit, quam reliqua (A C) ad reliquam (F L.)

Quia

Quia A B eſt ad F I in majori, quam C B ad L I; erit *a* permutando etiam A B ad C B in majori quam F I ad L I. Ergo convertendo *b* A B eſt ad A C in minori, quam F I ad F L; Ergo etiam permutando *c* A B eſt ad F I, in minori, quam A C ad F L.

a *Per 27. l. 5.*
b *Per 30. l. 5.*
c *Patet ex 27. l. 5.*

PROPOSITIO XXXIV.

SI rationes (A ad C, & E ad O) ſunt æqualium rationum (A ad B & E ad F) duplicatæ, aut triplicatæ & ſic deinceps, æquales ſunt etiam ipſæ. *Fig. 19.*

Quia ratio A ad C duplicata eſt rationis A ad B, erit *a* ut A ad B, ſic B ad C. Ob eandem cauſam erit ut E ad F, ſic F, ad O. Cum ergo ſit ut A ad B, ſic per hyp. E ad F; & ut B ad C, ſic F ad O (nam ut B ad C, ſic A ad B, hoc eſt E ad F, hoc eſt F ad O) igitur *b* ex æquo erit, ut A ad C, ſic E ad O.

a *Per defin. 10. l. 5.*
b *Per 22. l. 5.*

PROPOSITIO XXXV.

RAtiones æquales A ad C & E ad O, ſint duplicatæ, aut triplicatæ, et ſic deinceps, rationum A ad B, & E ad F; etiam hæ æquales erunt. *Fig. 20.*

Si negas, ſit ut A ad B, ſic E ad aliam Z inæqualem ipſi F, & fiat ut E ad Z, ſic Z

ad

ſit demonſtratio, ut jam reipſa cognoſcemus, facilè apparebit præpoſtere egiſſe Euclidem, qui æqualitatis rationum primum, & fundamentale indicium ſumi voluit hac multiplicium in demonſtratâ hactenus proprietate, cujus tam remota & obſcura ſit cum rationum æqualitate connexio.

Lemma 1.

SIt A ad B, ut C ad F; & ſint antecedentium, A, C, quælibet æquè multiplices I, Q, nimirum vel duplæ, vel triplæ & ſic deinceps. Sint item conſequentium B, F quælibet æquè multiplices L, R. Fig. 21.

Erit quoque ut I ad L, ſic Q ad R.

Quoniam enim A eſt ad B, ut C ad F, etiam I, dupla ipſius A erit ad B, ut Q dupla ipſius C eſt ad F: & I, tripla A erit ad B, ut Q tripla C, ad F. Et ſic in infinitum. Quod quidem æquè eſt per ſe clarum ac quodlibet axioma. Quoniam igitur I eſt ad B, ut Q ad F, erit quoque I ad L duplam ipſius B, ut Q ad R duplam ipſius F; & ut I ad L triplam ipſius B, ita Q ad R triplam F: Et ſic in infinitum, quod rurſus tam clarum eſt, quam axioma quodcunque. Liquet ergo propoſitum.

Lemma 2.

SI quantitates A, B habeant communem menſuram C; erit A toties ſumta, quoties eſt C in B, æqualis quantitati B toties ſumtæ, quoties C eſt in A. Fig. 22.

Bona-

Ponatur C contineri in B quater; & in A ſexies, ac proinde B eſſe 4. C, & A eſſe 6. C. Igitur 6. C (hoc eſt A) ducta in 4. C (hoc eſt toties ſumta quoties C eſt in B) efficiunt 24. C. Similiter 4. C (hoc eſt B) ducta in 6. C (hoc eſt toties ſumta quoties C eſt in A) efficiunt etiam 24. C. Ergo A toties ſumta quoties C in B, æquatur B toties ſumtæ quoties C in A.

Theorema 1.

Fig. 23. *SI ratio A B ad F I major ſit ratione L ad R, tales ſumi poſſunt antecedentium (A B & L) æquè multiplices, tales item æquè multiplices conſequentium (F I, & R,) ut multiplâ antecedentis A B rationis majoris excedente multiplam conſequentis (F I) multiplex antecedentis L, rationis minoris non excedat multiplicem ſui conſequentis (R.)*

Sit ratio A B ad F I major ratione L ad R, & ſint A B, & L, majores rationum termini. Quoniam igitur A B ad F I majorem habet rationem quàm L ad R; alia quædam quantitas Z a habebit ad F I eandem rationem, quam L ad R. Quia jam igitur ratio Z ad F I æqualis eſt rationi L ad R, poniturque ratio A B ad F I major ratione L ad R, erit quo-

a Per axiomate 1. l. 5.

quoque ratio A B ad F I major ratione Z ad F I; ac proinde A B major eſt quam Z: quæ omnia per ſe ſunt manifeſta. Igitur ex A B ſumi poterit A C per Z, eritque etiam A C ad F I, ut L ad R. Auferatur reſiduum B C ex A C quoties poteſt, puta ter; tum ſeca A C in tot æquales partes exem. gr. in 6. donec earum una poſſit auferri ſæpius ex F I, quam B C ex A C, puta quater, & reſiduum eſto O I, quod erit minus unâ particulâ. Hoc quoque fieri poſſe per ſe eſt manifeſtum, & patet ex p. 1. l. 10. quæ à proportionibus non dependet. Particularum vero illarum quantitas eſto Q.

Quoniam igitur Q eſt menſura communis quantitatum A C, F O, ergo A C toties ſumta, quoties Q eſt in F O, nempe quater, æquatur F O toties ſumtæ, quoties Q eſt in A C, nempe ſexies. Deinde quia reſiduum O I eſt minus unâ particulâ, hoc eſt quam Q, erit O I toties accepta, quoties Q eſt in A C, nempe ſexies, adhuc minor quam A C. Ulterius quia B C minus ſæpè auferri poteſt ex A C, quam Q, ex F I (poſitum quippe fuit B C ex A C auferri tantum poſſe ter, Q vero quater ex F I.) Manifeſtum eſt B C toties ſumtum, quoties Q in F I, nempe quatur, majus fore quam A C, ac proinde multo majus eſſe quam O I ſumtum ſexies, quod oſtendi ſupra eſſe minus quam A C. Atqui oſtenſum eſt A C ſumtum quater, & F O ſumtum ſexies eſſe æqualia. Quare ſi A C ſumto quater addatur B C quater, & ad F O ſexies ſumtum addatur O I ſexies, erunt 4. A C & 4. B C, hoc eſt 4. A B majora, quam 6. F O & 6. O I, hoc eſt quam

6. F I,

6. F I. Quia vero 4. A C æqualia erant 6. F O; erunt 4. A C minora 6. F I. Sed ut A C ad F I, ita ponebatur ſupra L eſſe ad R. Ergo per lem. 1. etiam 4. L minora ſunt quam 6. R. Acceptæ ſunt igitur antecedentium A B, & L æquè multiplices, nempe quadruplæ, item æquè multiplices conſequentium F I & R, nempe ſecuplæ, & tamen oſtenſum eſt multiplam antecedentis A B (nempe 4. A B) ſuperare multiplicem conſequentis F I (nempe 6. F I:) multiplicem vero antecedentis L (nempe 4. L) non excedere multiplicem conſequentis R (nempe 6. R.) Quod erat demonſtrandum.

Theorema 2.

Fig. 21. *SI antecedentium (A, C) qualibet æquè multiplices, quibuſlibet conſequentium (B, F) æquè multiplicibus, ſint vel ſimul majores, vel ſimul minores, vel ſimul æquales, ratio (A ad B) rationi (C ad F) æqualis erit.*

Si negas, ſit ratio A ad B major ratione C ad F. Ergo per theor. præced. poterunt antecedentium A, C ſumi tales æquè multiplices, item tales conſequentium B, F æquè multiplices, ut multiplâ antecedentis A excedente multiplam conſequentis B, multipla antecedentis C non excedat multiplam conſequentis F, quod eſt abſurdum, quia evertit hypotheſim. Ergo &c.

Io

In hac demonſtratione, uti & in ſequentibus ea ſolum propoſitiones ex quinto libro adhibentur, quæ per ſe æquè ſunt manifeſtæ, atque ipſa axiomata.

Theorema 3.

SI ſumi poſſint antecedentium (O, R) tales æquè multiplices, itemque tales æquè multiplices conſequentium (Q, S,) ut multiplâ antecedentis unitus (O) ſuperante multiplam conſequentis (Q,) multipla antecedentis alterius (R) non excedat multiplam ſui conſequentis (S;) erit ratio (O ad Q,) cujus antecedentis multiplex ſuperat multiplicem conſequentis, major ratione alterâ (R ad S.) Fig. 24.

Rationes illas inæquales eſſe ſic oſtendo. Si eſſent æquales; quæcunqne antecedentium æquè multiplices (ut patet à fortiori ex lemmate primo) quibuſcunque æquè multiplicibus conſequentium vel ſimul majores eſſent, vel ſimul minores, quod eſt abſurdum, quia evertit hypotheſin.

Quod autem Ratio O ad Q major ſit, cujus antecedentis multiplex ſuperat, ſic oſtendo. Si negas, ſit ratio R ad S major ratione O ad Q. Ergo per theor. 1. tales accipi poſſunt antecedentium R & O æque multiplices, taleſque item æquè multiplices conſequentium S & Q, ut multiplâ antecedentis R rationis

tionis majoris excedente multiplam conſequenti S, multipla antecedentis O non excedat multiplam conſequentis Q: non autem tales (quod facilè ex 1. lem. oſtenditur) ut multipla O excedente multiplam Q multipla R non excedat multiplam S. Quod eſt abſurdum, cum evertat hypotheſim.

Theorema 4.

Fig. 25.

Cum proportio irrationalis eſt, nulla multiplex antecedentis ulli conſequentis multiplici æqualis eſſe poteſt. Quare, cum per multiplices inquiritur proportionum irrationalium æqualitas, ſolummodo multiplicium ſimultaneus exceſſus, defectuſque ſpectari debent.

Sit proportio irrationalis A ad B. Si A aliquoties ſumta poſſet fieri æqualis B aliquoties ſumtæ, ac proinde eandem ambæ efficere quantitatem Z: ſingulæ A & B eſſent eidem Z commenſurabiles, ac proinde & commenſurabiles inter ſe, contra hypotheſim.

Quia tamen ſecundum theorema tam ad rationales proportiones pertinet, quam ad irrationales, ſimultaneo exceſſui & defectui, æqualitatem ſimultaneam addidimus cum Euclide.

Demonſtratis hunc in modum, quæ ab Euclide def. 5. & 6. ponuntur, jam omnes ejus quinti & ſexti libri demonſtrationes ſubſiſtunt: patetque multiplicium illum exceſſum defectumque ſimultaneum, infallibile

bile indicium eſſe æqualitatis rationum, non quidem per ſe immediatè, ſed demonſtratione, quam modo dedimus, priùs ritè intellectâ.

Verùm quia indicium per multiplices, quantumvis jam ſecurum, nihilominus remotum eſt & implexum, hîc aliud clariſſimum & proximum, quod promiſi ſupra, demonſtrabo.

Theorema 5.

SI conſequentes (C F, N Q) & conſequentium qualibet aliquotæ ſimiles (puta et decimæ et centeſimæ et milleſimæ, & ita deinceps ſine termino) in antecedentibus (A B, G M) æquali ſemper numero contineantur; rationes (A B ad C F: & G M ad N Q) æquales erunt. Fig. 26.

Nota æquali numero continuari dicuntur, cum, ſi auferantur quoties poſſunt, æqualis eſt utrimque numerus ablatarum.

Demonſt. Si negas, erit ratio alterutra, puta A B, ad C F, major ratione G M ad N Q. Quoniam igitur A B ponitur ad C F majorem habere rationem quam G M ad N Q, manifeſtum eſt aliquam (puta A D) minorem quam A B, æqualem habere rationem ad C F, quam G M ad N Q. Manifeſtum ſimiliter eſt, aliquam ipſius C F aliquotam (ex. gr.

Theorema. 6.

SI aut aut conſequentes (C F, N Q) aut conſequentium aliquæ ſimiles aliquotæ (ex. gr. decimæ) inæquali numero in antecedentibus (AB , G M) contineantur, rationes (A B ad C F; et G M ad N Q) inæquales erunt, & erit illa major, cujus conſequentis aliquota ſæpius contineтur. Fig. 16.

Contineatur C E decima una ipſius C F, in AB millies, & ſit A O 1000 C E; tum vero reſiduum O B erit minus quam una C E. Deinde N P una decima N Q, contineatur in G M tantum nongenties nonagies ſepties, & ſit G K 997 N P; patet reſiduum K M fore minus una N P, ac proinde 1000 N P fore majores quam G M. Sit ergo G R, 1000 N P. Quoniam igitur A O eſt 1000 C E, & G R, 1000 N P; C F vero 10 C E, & N Q, 10 N P, erit A O ad C F, ut G R ad N Q. Ergo A B eſt ad C F in majori ratione, quam G R ad N Q; ac proinde in multo majori, quam G M ad N Q. Quod erat demonſtrandum.

Habemus jam igitur indubitatum, facillimũque indicium, ex quo rationes æquales, inæqualeſque certò liceat diſcernere. Et poſſemus ex illo, omnes, quæ quidem axio-

mata non ſint, l. 5, propoſitiones, quas per multiplices Euclides demonſtrat, multò expeditius demonſtrare, niſi magis ex uſu diſcentium putaremus, illas eâ methodo, quâ in primâ parte uſi jam ſumus, proponere.

TERTIA PARS.

De proportionum denominatoribus, algorythmo, compoſitione.

I.

Proportionis Diviſio.

PRima diviſio eſt in rationalem & irrationalem, ut dictum def. 4. utraque dividitur in rationem æqualitatis & inæqualitatis. Ratio inæqualitatis dividitur in rationem maioris inæqualitatis, quæ habet antecedens majus conſequente, & in rationem minoris inæqualitatis, quæ babet antecedens minus conſequente.

Rationalis proportio inæqualitatis majoris dividitur in quinque ſpecies, quæ ſunt; multiplex, ſuperparticularis, ſuperpartiens, multiplex ſuperparticularis, multiplex ſuperpartiens.

Ratio multiplex eſt quando major minorem aliquoties, continet, ut bis, ter, quater &c. diciturque ratio dupla, tripla, quadrupla.

Ratio

Ratio ſuperparticularis eſt, quando major minorem continet ſemel, & unam ejus partem aliquotam; ut ratio 3 ad 2, vel 6 ad 4 quæ dicitur ſeſquialtera, quia major minorem continet ſemel & ejus dimidium: ratio 4 ad 3 ſive 16 ad 12, quæ dicitur ſeſquitertia quia major minorem continet ſemel, & tertiam ejus partem, & ſic deinceps.

Ratio ſuperpartiens eſt, cum major minorem continet ſimel, & plures ejus aliquotas, non conficientes unam aliquotam. Talis eſt ratio 8 ad 5, vel 14 ad 10, quia 8 continet 5 ſemel, & inſuper 3, hoc eſt tres quintas ejuſdem numeri 5. quæ tamen ſimul ſumtæ non conficiunt unam aliquotam ipſius 5. Similiter 14 continet 10 ſemel & bis 2, hoc eſt duas quintas numeri 10, quæ tamen ſimul ſumtæ (nempè 4) non conficiunt unam aliquotam ipſius 10. Additur porro, non conficientes unam aliquotam, *quia aliàs eſſet ratio ſuperparticularis.*

Ratio multiplex ſuperparticularis eſt, cum major minorem aliquoties continet, & inſuper unam ejus aliquotam, ut ratio 5 ad 2, 10 ad 4 &c.

Ratio multiplex ſuperpartiens eſt, cum major minorem aliquoties continet, & adhuc plures ejus aliquotas non conficientes unam aliquotam, ut ratio 8 ad 3, 16 ad 6 &c.

II.

De Denominatore Proportionis rationalis.

DEnominator proportionis rationalis eſt qui diſtinctè & clarè exprimit habitudinem unius numeri ad alterum; ſive qui ita ſe habet ad unitatem, ut major ad minorem, ac proinde oſtendit, quoties major minorem contineat, & quoties minor contineatur à majore. Rationi 27 *ad* 9 *denominator eſt* 3, *quia* 3 *ita eſt ad unitatem, ut* 27 *ad* 9, *ac proinde oſtendit quoties conſequens in antecedente continetur, nempe ter.*

Cujuſcumque rationis denominator invenitur, ſi major terminus dividatur per minorem; nam quotiens diviſionis erit denominator. Ratio eſt, quia quotiens ita eſt ad unitatem, ut dividendus ad diviſorem, hoc eſt ut major ad minorem.

Exempl. detur ratio 60 *ad* 6. *Divide* 60 *per* 6; *quotiens* 10 *eſt denominator. Detur rurſum ratio* 60 *ad* 16. *diviſo* 60 *per* 16 *fit quotiens* $3\frac{3}{4}$ *hic eſt denominator.*

III.

De Denominatoribus Proportionum irrationalium.

CUm rationes irrationales fuerint reductæ ad rationes commune conſequens habentes, communis conſequentis antecedentia, erunt rationum denominatores, & commune conſequens munus ac locum explet unitatis.

Proportionis nullius irrationalis, ſi ſola ſit, exhiberi poteſt denominator. At ſi duæ fuerint, vel plures proportiones irrationales, alio quodam ſenſu earum denominatores poterunt exhiberi, qui nimirum oſtendant, quomodo una ratio ad alteram ſe habeat. Id quod egregiè obſervavit P. Gregorius à S. Vincentio, operis ſui Geometrici lib. 8. *def.* 2. *Qui vir cum præclariſſimis, & propè innumeris inventis Geometriam auxit, tum inprimis libro* 8. *ejuſdem operis de proportionalitatibus ita ſcripſit, ut novam de proportionalitatibus ſcientiam condidiſſe cenſeri meritò debeat. Datæ ſint rationes irrationales A, ad B; & C, ad D, quæ revocentur ad rationes F H, G H, habentes commune conſequens, H, ſic ut ratio F ad H ſit par rationi A ad B, & ratio C ad D par rationi G ad H; commune conſequens H munus explebit unitatis, & antecedentia F, G erunt denominatores rationum F ad H & G ad H (hoc eſt rationum A ad B, & C ad D,) quia oſtendunt quomodò* Fig 27.

modo una ratio ſeſe habeat ad alteram, ſicuti enim F eſt ad G, ita ratio F H eſt ad rationem G H, hoc eſt ratio A B ad rationem C D.

IV.

Axiomata.

Fig. 28. AX. 1. *Rationes (F ad H, & G ad H) commune habentes conſequens (H) eam inter ſe proportionem habent, quam antecedentia (F, G.) eſt prop. 2. P. Gregorii à S. Vinc. l. 8. quadr.*

Hoc eſt ratio G, ad H, tanto major eſt ratione F ad H, quanto G major eſt quam F.

Fig. 29. *Ax. 2. Rationes (I ad L & I ad M) commune habentes antecedens, reciprocam inter ſe habent conſequentium propo rtionem, eſt propoſ. 7. P. Gregorii à S. Vinc. lib. 8. quadr.*

Hoc eſt ratio I ad L eſt ad rationem I ad M, ut reciprocè eſt M conſequens, ad conſequens L: ſive ratio I ad L tantò major eſt ratione ejuſdem I ad M, quanto L fuerit minor, quam M; ac proinde quanto M fuerit major quam L.

Ax. 3. Rationes rationales eam inter ſe rationem habent, quam denominatores. Patet ex axiom. 1.

a Num. 2. *Dentur ratio 12 ad 3, & ratio 15 ad 6, quorum denominatores ſunt 4 & 2 $\frac{1}{2}$. Ex deſin. a denom. ratio 12 ad 3 eſt eadem cum ratione 4 ad 1, & ratio 15 ad 6 eſt eadem cum ratione 2 $\frac{1}{2}$ ad 1.*

b Per axio. 1. hic. *Sed ratio 4 ad 1 eſt ad rationem 2 $\frac{1}{2}$ ad 1, ut 4 eſt ad 2 $\frac{1}{2}$. Ergo etiam ratio 12. ad 3 eſt ad rationem*

nem 15 ad 6. ut denominator 4 eſt ad denominatorem $2\frac{1}{2}$.

V.

Rationum rationalium Additio & Subtractio.

ADditio perficitur, ſi rationum denominatores addantur. Ratio enim quam habet denominatorum ſumma ad unitatem eſt rationum datarum ſumma quæſita. Fig. 30.

Dentur ratio 12 ad 3 & 15 ad 6, earum denominatores 4 & $2\frac{1}{2}$ additi ſibi mutuo faciunt $6\frac{1}{2}$. Ratio $6\frac{1}{2}$ ad 1 eſt par rationi 12 ad 3 & rationi 15 ad 6. Patet ex Ax. 1. & 3.

Subtractio fit ablatione minoris denominatoris à majore, nam ratio reſidui ad unitatem, eſt ratio quæ remanet poſt minorem rationem à majori detractam. Patet ex axiom. 1. & 3.

Dentur rationes 12 ad 3, & 15 ad 6. Harum denominatores ſunt 4 & $2\frac{1}{2}$. Aufer minorem $2\frac{1}{2}$ à majori 4, remanent $\frac{3}{2}$: ratio $\frac{3}{2}$ ad 1, eſt ea quæ remanet, ubi rationem 15 ad 6 ſeu $2\frac{1}{2}$ ad 1 detraxeris ex ratione 12 ad 3, ſeu 4 ad 1.

VI. Ra-

VI.

Rationum irrationalium Additio & Subtractio.

Fig. 31.

Rationes datæ (*A ad B, & C ad D*) *reducantur ad rationes* (*F ad H & G ad H*) *habentes commune conſequens* (*H.*) *Antecedentia* F & G: *ſibi addita ſunt F G. Ratio F G ad H eſt ſumma rationum F ad H, & G ad H, hoc eſt rationum A ad B & C ad D. Patet ex axio.* 1.

Subtractio perficitur, ſi rationes datæ ad commune conſequens reducantur, ac tum minus antecedens G auferatur à majori F; ratio enim reſidui ad H, eſt ea quæ remanet poſtquam rationem G ad H, ſeu C ad D ſubtraxeris à ratione F ad H, ſeu A ad B, Patet ex 1. *axiom.*

VII.

Rationum rationalium multiplicatio & Diviſio.

Denominatores rationum per invicem multiplicati dabunt denominatorem rationis, quæ ex datarum rationum multiplicatione producitur.

Hoc eſt ratio quam ad unitatem habet numerus ex denominatorum multiplicatione productus, eſt ea quæ fit ex rationum multiplicatione. Patet ex

ex Ax. 1 & 3. Nam multiplicatio rationum eſt unius ad alteram additio ſæpius repetita, Hanc autem perfici repetitâ ſæpius antecedentium additione (hoc eſt multiplicatione) patet ex jam citatis axio. 1. & 3.

Sint datæ rationes 9 ad 3. & 20 ad 4, denominatores 3 & 5 multiplicati faciunt 15. Ratio 15 ad 1 eſt ea, quæ ex multiplicatione rationum 9 ad 3 (ſeu 3 ad 1) & 20 ad 4 (ſeu 5 ad 1,) producitur. Fig. 32.

Diviſio rationum perficitur, ſi denominator majoris dividatur per denominatorem minoris. Nam ratio quotientis ad unitatem, eſt ea quæ habetur ex diviſione rationis datæ majoris per rationem minorem. Patet ex 1 & 3 *axiomate. Cum rationis per rationem diviſio, ſit ſubtractio unius ab alterâ ſæpius repetita.*

VIII.

Multiplicatio rationum irrationalium.

Datæ ſint rationes A ad B, & C *ad* D, *per invicem multiplicandæ. Fiat ut A ad* B, *ita* D *ad* E. *Ratio* C *ad F eſt ea, quæ producitur ex multiplicatione rationum A ad* B, & C *ad* D. Fig. 33.

Hæc operatio eſt Gregorii *à S. Vincentio, lib. 8. prop. 75. Sed eam nec ipſe, nec alius quiſquam demonſtrat.*

Hunc

Hunc igitur in modum demonſtrabitur. Ratio C ad E producitur ex multiplicatione rationum C ad D, & D ad E, ut patleit ex demonſtratione numeri 12, ab his independente. Sed rationes C ad D, & D ad E per conſt. ſunt rationes C ad D, & A ad B. Ergo ratio C ad E eſt ea quæ fit ex multiplicatione rationum A ad B, & C ad D. Quod erat demonſtrandum.

IX.

Diviſio rationum irrationalium.

Fig 13. D*Ata ſit ratio C ad E dividenda per rationem A ad B. Fiat ut A ad B, ſic C ad D. Ratio D ad E eſt quotiens.*

Nam ratio C ad D (hoc eſt per conſt. ratio A ad B) multiplicata per rationem D ad E producit rationem C ad E, ut patebit ex demonſtratione num. 12, ab his independente. Ergo ratio D ad E eſt quotiens, cum multiplicata in diviſorem, qui eſt ratio A ad B, reſtituat rationem C ad E, quæ proponebatur dividenda.

De Compoſitione rationum. eius Definitio.

R*Atio ex rationibus componi dicitur, cum rationum quantitates (hoc eſt denominatores) inter*

inter ſe multiplicatæ aliquam effecerint rationem. Eſt definitio 5. l. 6. Euclidis.

Dentur rationes quotcunque quarum denominatores ſint 2, 3, $1\frac{1}{4}$. Multiplica denominatorem 2 per 3 denom. fit 6 denominator rationis compoſitæ ex rationibus, quarum denominatores ſunt multiplicati. Hoc eſt ratio 6 ad 1 eſt compoſita ex rationibus 6 ad 3. & 12 ad 4. Quod ſi denominatorem 6 multiplices per denominatorem tertium $1\frac{1}{4}$; fit $7\frac{1}{2}$ denominator rationis compoſita ex tribus dati rationibus, quarum denominatores ſunt 2, 3, $1\frac{1}{4}$. Fig. 34.

XI.

Compoſitio rationum non aliud eſt, quam rationum multiplicatio: & ratio omnis ex iiſdem rationibus componitur, ex quarum multiplicatione producitur.

Nam ut patet ex axiomatis n. 4. & ex n. 7. ratio, quæ ex plurium rationum multiplicatione producitur, ea eſt, quam quantitas ex denominatorum multiplicatione producta habet ad unitatem, ſeu conſequens commune. Atqui etiam per defin. Euclid. ratio, quæ ex pluribus rationibus componitur, ea eſt, quam quantitas ex denominatorum multiplicatione producta habet ad unitatem ſeu conſe-

Scholium.

UT numeri ſequentiis demonſtratio clarius percipiatur, obſervandum eſt multiplicari ac dividi magnitudines per invicem, cum analogia quadam ad numeros. Quemadmodum igitur numerus per numerum multiplicari dicitur, cum ut eſt unitas ad alterutrum, ita reliquus fit ad alium quempiam, qui productum dicitur; ita planè magnitudo per magnitudinem dicetur multiplicari, cum ut quæpiam recta pro unitate aſſumta ſe habet ad alterutram datarum, ita reliqua fiet ad aliquam quartam, quæ productum vocabitur. Pari modo quemadmodum numerus per numerum dividi dicitur, quando ut unus ad alterum, ita unitas fit ad alium, qui quotiens nominatur; ita quoque magnitudo per magnitudinem dicetur dividi, quando aſſumtâ quantitate aliquâ pro unitate, ut una ſe habet ad alteram, ita unitas ad aliam, quæ proinde dicitur quotiens.

XII.

Si fuerint quæcunque & quotcunque quantitates, ſeu magnitudines, ſeu numeri; ratio prima ad ultimam componitur ex rationibus mediarum.

IN numeris demonſtratum eſt à Theone, Eutocio, & Vitellione. Qui in magnitudinibus demonſtraret, nemo hactenus inventus eſt. Unde Gregorius à S. Vincentio, magnus Geometra, libro 8. ad principium ſecundum, cenſet inter principia numerandum eſſe, donec alicui demonſtratio occurrerit, quâ inter theoremata referri poſſit.

Univerſalem igitur hujus rei demonſtrationem dare conabimur hunc in modum.

Demonſtratur in magnitudinibus.

DAtæ ſint magnitudines quæcunque & quotcunque A, B, C, D. Oſtendendum eſt rationem A ad D componi ex rationibus A ad B; B ad C; C ad D. Fig. 35.

Fiat ut B ad C, ita X ad B. Eruntque rationes A ad B: B ad C reductæ ad rationes A ad B, X ad B, habentes commune conſequens B, ac proinde rationum denominatores ſunt A, X & conſequens commune B a munus explet unitatis, quæ eſt com- a Per n. 5.
mune

mune conſequens reſpectu omnium denominatorum numericorum.

Itaque ſi velimus magnitudines A, X per invicem multiplicare, oportebit b *facere ut B unitas eſt ad X, ita A ad quartam Z, quæ erit productum multiplicationis A per X, ſeu X per A; planè ac ſi cupias in vicem multiplicare numeros R, S, fit ut unitas ad unum numerum S, ita alter R ad quartum V, qui eſt productum multiplicationis.*

b Schol. præced.

Quoniam igitur quantitas Z eſt productum ex multiplicatione denominatorum A, X, erit ratio c *hujus producti Z ad B unitatem ſeu commune conſequens, ea, quæ producitur ex multiplicatione rationum A ad B; X ad B; prorſus ut in rationum numericarum multiplicatione, numero 7 oſtendimus evenire, in qua ſi denominatores inter ſe multiplicentur, ratio producti ad unitatem ea eſt, quæ fit ex rationum multiplicatione.*

c Per defin. num. 10.

Atqui per conſtr. ratio X ad B eſt ratio B ad C. Ergo etiam ratio Z ad B producitur ex multiplicatione rationum A ad B; B ad C. Quia vero per conſtr. ut B eſt ad X, ita A eſt ad Z, etiam inverſim Z ad A, ut X ad B, hoc eſt per conſtr. ut B ad C. Igitur permutando ut Z eſt ad B, ita A eſt ad C. Sed jam oſtenſum rationem Z ad B produci ex multiplicatione rationum A ad B; B ad C. Ergo etiam ratio A ad C producitur ex multiplicatione rationum A ad B; & B ad C. Atqui num. XI. oſtenſum eſt rationes componi ex iiſdem rationibus, ex quarum multiplicatione producuntur. Ergo ratio A

ad

ad C componitur ex rationibus A ad B, & B ad C.

Eodem modo demonſtrabitur ratio A ad D componi ex rationibus A ad C, & C ad D. Ergo ratio A ad D componitur ex rationibus A ad B, & B ad C, & C ad D. Et ſic deinceps in infinitum. Quod erat demonſtrandum.

Demonſtratur in numeris.

EAndem prorſus demonſtrationem valere in numeris jam oſtendam, unde etiam veritas illius, ac ſoliditas magis ſtabilietur.

	$\frac{8}{3}$	
8	2	$\frac{4}{3}$
4	1	
3	$\frac{3}{4}$	

Dati *ſint tres numeri qui-cumque exem. gr. 8, 4, 3. Fiat ut 4. ad 8. ita. 1. ad 2. & ut 4. ad 3. ſic 1. ad $\frac{3}{4}$. Erunt* a Per 22. l. 5.
igitur rationes 8 ad 4 & 2 ad 1. item rationes 4. ad 3. & 1 ad $\frac{3}{4}$. inter ſe æquales; eritque ex æquo a *etiam ratio 8 ad 3 æqualis rationi 2 ad $\frac{3}{4}$.*

Fiat deinde ut $\frac{3}{4}$ ad 1. ita 1. ad $\frac{4}{3}$: eruntque rationes 2 ad 1. & 1 ad $\frac{4}{3}$ (hoc eſt rationes 8 ad 4 & 4 ad 3.) reductæ ad duas rationes 2 ad 1 & b Patet ex
$\frac{4}{3}$ ad 1. habentes commune conſequens unitatem; num. 2.
ac proinde 2 & $\frac{4}{3}$ erunt b *raionum 8 ad 4. & 4 ad 3. denominatores. Multiplicentur jam per invicem denominatores 2 & $\frac{4}{3}$ hoc eſt fiat ut 1 ad $\frac{4}{3}$. ita 2 ad $\frac{8}{3}$. Erunt $\frac{8}{3}$ productum ex 2 & $\frac{4}{3}$ denominatoribus rationum 8 ad 4. & 4 ad 3. inter ſe multiplicatis. Ergo ratio hujus pro-*

M duƈti

II.

De Denominatore Proportionis rationalis.

DEnominator proportionis rationalis eſt qui diſtinctè & clarè exprimit habitudinem unius numeri ad alterum; ſive qui ita ſe habet ad unitatem, ut major ad minorem, ac proinde oſtendit, quoties major minorem contineat, & quoties minor contineatur à majore. Rationi 27 *ad* 9 *denominator eſt* 3, *quia* 3 *ita eſt ad unitatem, ut* 27 *ad* 9, *ac proinde oſtendit quoties conſequens in antecedente continetur, nempe ter.*

Cujuſcumque rationis denominator invenitur, ſi major terminus dividatur per minorem, nam quotiens diviſionis erit denominator. Ratio eſt, quia quotiens ita eſt ad unitatem, ut dividendus ad diviſorem, hoc eſt ut major ad minorem.

Exempl. detur ratio 60 *ad* 6. *Divide* 60 *per* 6; *quotiens* 10 *eſt denominator. Detur rurſum ratio* 60 *ad* 16. *diviſo* 60 *per* 16 *fit quotiens* $3\frac{3}{4}$ *hic eſt denominator.*

III.

De Denominatoribus Proportionum irrationalium.

Cum rationes irrationales fuerint reductæ ad rationes commune conſequens habentes, communis conſequentis antecedentia, erunt rationum denominatores, & commune conſequens munus ac locum explet unitatis.

Proportionis nullius irrationalis, ſi ſola ſit, exhiberi poteſt denominator. At ſi duæ fuerint, vel plures proportiones irrationales, alio quodam ſenſu earum denominatores poterunt exhiberi, qui nimirum oſtendant, quomodo una ratio ad alteram ſe habeat. Id quod egregiè obſervavit P. Gregorius à S. Vincentio, operis ſui Geometrici lib. 8. def. 2. Qui vir cum præclariſſimis, & propè innumeris inventis Geometriam auxit, tum inprimis libro 8. ejuſdem operis de proportionalitatibus ita ſcripſit, ut novam de proportionalitatibus ſcientiam condidiſſe cenſeri meritò debeat. Datæ ſint rationes irrationales A, ad B; & C, ad D, quæ revocentur ad rationes F H, G H, habentes commune conſequens, H, ſic ut ratio F ad H ſit par rationi A ad B, & ratio C ad D par rationi G ad H; commune conſequens H munus explebit unitatis, & antecedentia F, G erunt denominatores rationum F ad H & G ad H (hoc eſt rationum A ad B, & C ad D,) quia oſtendunt quo- Fig 27.

modo una ratio ſeſe habeat ad alteram, ſicuti enim F eſt ad G, ita ratio F H eſt ad rationem G H, hoc eſt ratio A B ad rationem C D.

IV.

Axiomata.

Fig. 28. AX. 1. *Rationes (F ad H, & G ad H) commune habentes conſequens (H) eam inter ſe proportionem habent, quam antecedentia (F, G.) eſt prop. 2. P. Gregorii à S. Vinc. l. 8. quadr.*

Hoc eſt ratio G, ad H, tanto major eſt ratione F ad H, quanto G major eſt quam F.

Fig. 29. *Ax. 2. Rationes (I ad L & I ad M) commune habentes antecedens, reciprocam inter ſe habent conſequentium propo rtionem, eſt propoſ. 7. P. Gregorii à S. Vinc. lib. 8. quadr.*

Hoc eſt ratio I ad L eſt ad rationem I ad M, ut reciprocè eſt M conſequens, ad conſequens L: ſive ratio I ad L tantò major eſt ratione ejuſdem I ad M, quanto L fuerit minor; quam M; ac proinde quanto M fuerit major quam L.

Ax. 3. Rationes rationales eam inter ſe rationem habent, quam denominatores. Patet ex axiom. 1.

Dentur ratio 12 ad 3, & ratio 15 ad 6, quarum denominatores ſunt 4 & $2\frac{1}{2}$. Ex defin. a *denom. ratio 12 ad 3 eſt eadem cum ratione 4 ad 1, & ratio 15 ad 6 eſt eadem cum ratione $2\frac{1}{2}$ ad 1.*

a Num. 2.

b Per axio. 1. hic.

Sed ratio 4 ad 1 eſt ad rationem $2\frac{1}{2}$ ad 1, ut b *4 eſt ad $2\frac{1}{2}$. Ergo etiam ratio 12. ad 3 eſt ad rationem*

nem 15 ad 6, ut denominator 4 eſt ad denominatorem 2 $\frac{1}{2}$.

V.

Rationum rationalium Additio & Subtractio.

ADditio perficitur, ſi rationum denominatores addantur. Ratio enim quam habet denominatorum ſumma ad unitatem eſt rationum datarum ſumma quæſita. Fig. 30.

Dentur ratio 12 ad 3 & 15 ad 6, earum denominatores 4 & 2$\frac{1}{2}$ additi ſibi mutuo faciunt 6 $\frac{1}{2}$. Ratio 6 $\frac{1}{2}$ ad 1 eſt par rationi 12 ad 3 & rationi 15 ad 6. Patet ex Ax. 1. & 3.

Subtractio fit ablatione minoris denominatoris à majore, nam ratio reſidui ad unitatem, eſt ratio quæ remanet poſt minorem rationem à majori detractam. Patet ex axiom. 1. & 3.

Dentur rationes 12 ad 3, & 15 ad 6. Harum denominatores ſunt 4 & 2$\frac{1}{2}$. Aufer minorem 2$\frac{1}{2}$ à majori 4, remanent $\frac{3}{2}$: ratio $\frac{3}{2}$ ad 1, eſt ea quæ remanet, ubi rationem 15 ad 6 ſeu 2 $\frac{1}{2}$ ad 1 detraxeris ex ratione 12 ad 3, ſeu 4 ad 1.

VI. Ra-

VI.

Rationum irrationalium Additio & Subtractio.

Fig. 31.

Rationes datæ (A ad B, & C ad D) reducantur ad rationes (F ad H & G ad H) habentes commune conſequens (H.) Antecedentia F & G: ſibi addita ſunt F G. Ratio F G ad H eſt ſumma rationum F ad H, & G ad H, hoc eſt rationum A ad B & C ad D. Patet ex axio. 1.

Subtractio perficitur, ſi rationes datæ ad commune conſequens reducantur, ac tum minus antecedens G auferatur à majori F; ratio enim reſidui ad H, eſt ea quæ remanet poſtquam rationem G ad H, ſeu C ad D ſubtraxeris à ratione F ad H, ſeu A ad B. Patet ex 1. axiom.

VII.

Rationum rationalium multiplicatio & Diviſio.

Denominatores rationum per invicem multiplicati dabunt denominatorem rationis, quæ ex datarum rationum multiplicatione producitur.

Hoc eſt ratio quam ad unitatem habet numerus ex denominatorum multiplicatione productus, eſt ea quæ fit ex rationum multiplicatione. Patet ex

ex *Ax.* 1 & 3. *Nam multiplicatio rationum eſt unius ad alteram additio ſæpius repetita, Hanc autem perfici repetitâ ſæpius antecedentium additione* (*hoc eſt multiplicatione*) *patet ex jam citatis axio.* 1. & 3.

Sint datæ rationes 9 *ad* 3. & 20 *ad* 4, *denominatores* 3 & 5 *multiplicati faciunt* 15. *Ratio* 15 *ad* 1 *eſt ea, quæ ex multiplicatione rationum* 9 *ad* 3 (*ſeu* 3 *ad* 1) & 20 *ad* 4 (*ſeu* 5 *ad* 1,) *producitur.* Fig. 32.

Diviſio rationum perficitur, ſi denominator majoris dividatur per denominatorem minoris. Nam ratio quotientis ad unitatem, eſt ea quæ habetur ex diviſione rationis datæ majoris per rationem minorem. Patet ex 1 & 3 *axiomate. Cum rationis per rationem diviſio, ſit ſubtractio unius ab alterâ ſæpius repetita.*

VIII.

Multiplicatio rationum irrationalium.

D*Atæ ſint rationes A ad* B, & C *ad* D, *per invicem multiplicandæ. Fiat ut A ad* B; *ita* D *ad* E. *Ratio* C *ad* F *eſt ea, quæ producitur ex multiplicatione rationum A ad* B, & C *ad* D. Fig. 33.

Hæc operatio eſt Gregorii *à S. Vincentio, lib.*8. *prop.*75. *Sed eam nec ipſe, nec alius quiſquam demonſtrat.*

Hunc

Hunc igitur in modum demonſtrabitur. Ratio C ad E producitur ex multiplicatione rationum C ad D, & D ad E, ut patbeit ex demonſtratione numeri 12, ab his independente. Sed rationes C ad D, & D ad E per conſt. ſunt rationes C ad D, & A ad B. Ergo ratio C ad E eſt ea quæ fit ex multiplicatione rationum A ad B, & C ad D. Quod erat demonſtrandum.

IX.

Diviſio rationum irrationalium.

Fig. 13. *Data ſit ratio C ad E dividenda per rationem A ad B. Fiat ut A ad B, ſic C ad D. Ratio D ad E eſt quotiens.*

Nam ratio C ad D (hoc eſt per conſt. ratio A ad B) multiplicata per rationem D ad E producit rationem C ad E, ut patebit ex demonſtratione num. 12, *ab his independente. Ergo ratio D ad E eſt quotiens, cum multiplicata in diviſorem, qui eſt ratio A ad B, reſtituat rationem C ad E, quæ proponebatur dividenda,*

De Compoſitione rationum, eius Definitio.

Ratio ex rationibus componi dicitur, cum rationum quantitates (hoc eſt denominatores) inter

inter ſe multiplicatæ aliquam effecerint rationem. Eſt definitio 5. l. 6. Euclidis.

Dentur rationes quotcunque quarum denominatores ſint 2, 3, $1\frac{1}{4}$. Multiplica denominatorem 2 per 3 denom. fit 6 denominator rationis compoſitæ ex rationibus, quarum denominatores ſunt multiplicati. Hoc eſt ratio 6 ad 1 eſt compoſita ex rationibus 6 ad 3. & 12 ad 4. Quod ſi denominatorem 6 multiplices per denominatorem tertium $1\frac{1}{4}$; fit $7\frac{1}{2}$ denominator rationis compoſitæ ex tribus dati rationibus, quarum denominatores ſunt 2, 3, $1\frac{1}{4}$. Fig. 34.

XI.

Compoſitio rationum non aliud eſt, quam rationum multiplicatio: & ratio omnis ex iiſdem rationibus componitur, ex quarum multiplicatione producitur.

Nam ut patet ex axiomatis n. 4. & ex n. 7. ratio, quæ ex plurium rationum multiplicatione producitur, ea eſt, quam quantitas ex denominatorum multiplicatione producta habet ad unitatem, ſeu conſequens commune. Atqui etiam per deſin. Euclid. ratio, quæ ex pluribus rationibus conponitur, ea eſt, quam quantitas ex denominatorum multiplicatione producta habet ad unitatem ſeu conſe-

Scholium.

UT numeri ſequentis demonſtratio clarius percipiatur, obſervandum eſt multiplicari ac dividi magnitudines per invicem, cum analogia quadam ad numeros. Quemadmodum igitur numerus per numerum multiplicari dicitur, cum ut eſt unitas ad alterutrum, ita reliquus fit ad alium quempiam, qui productum dicitur; ita planè magnitudo per magnitudinem dicetur multiplicari, cum ut quæpiam recta pro unitate aſſumta ſe habet ad alterutram datarum, ita reliqua fiet ad aliquam quartam, quæ productum vocabitur. Pari modo quemadmodum numerus per numerum dividi dicitur, quando ut unus ad alterum, ita unitas fit ad alium, qui quotiens nominatur; ita quoque magnitudo per magnitudinem dicetur dividi, quando aſſumtâ quantitate aliquâ pro unitate, ut una ſe habet ad alteram, ita unitas ad aliam, quæ proinde dicitur quotiens.

XII.

XII.

Si fuerint quæcunque & quotcunque quantitates, ſeu magnitudines, ſeu numeri; ratio prima ad ultimam componitur ex rationibus mediarum.

IN numeris demonſtratum eſt à Theone, Eutocio, & Vitellione. Qui in magnitudinibus demonſtraret, nemo hactenus inventus eſt. Unde Gregorius à S. Vincentio, magnus Geometra, libro 8, ad principium ſecundum, cenſet inter principia numerandum eſſe, donec alicui demonſtratio occurrerit, quâ inter theoremata referri poſſit.

Univerſalem igitur hujus rei demonſtrationem dare conabimur hunc in modum.

Demonſtratur in magnitudinibus.

DAtæ ſint magnitudines quæcunque & quotcunque A, B, C, D. Oſtendendum eſt rationem A ad D componi ex rationibus A ad B; B ad C; C ad D. Fig. 35.

Fiat ut B ad C, ita X ad B. Eruntque rationes A ad B: B ad C reductæ ad rationes A ad B, X ad B, habentes commune conſequens B, ac proinde rationum denominatores ſunt A, X & conſequens commune B a munus explet unitatis, quæ eſt com- a Per n. 3.
mune

mune conſequens reſpectu omnium denominatorum numericorum.

Itaque ſi velimus magnitudines A, X per invicem multiplicare, oportebit b *facere ut* B *unitas eſt ad X, ita A ad quartam Z, quæ erit productum multiplicationis A per X, ſeu X per A; planè ac ſi cupias in vicem multiplicare numeros R, S, fit ut unitas ad unum numerum S, ita alter R ad quartum V, qui eſt productum multiplicationis.*

b *Schol. praced.*

Quoniam igitur quantitas Z eſt productum ex multiplicatione denominatorum A, X, erit ratio c *hujus producti Z ad* B *unitatem ſeu commune conſequens, ea, quæ producitur ex multiplicatione rationum A ad* B; *X ad* B; *prorſus ut in rationum numericarum multiplicatione, numero 7 oſtendimus evenire, in qua ſi denominatores inter ſe multiplicentur, ratio producti ad unitatem ea eſt, quæ fit ex rationum multiplicatione.*

c *Per defin. num.* 10.

Atqui per conſtr. ratio X ad B *eſt ratio* B *ad* C. *Ergo etiam ratio* Z *ad* B *producitur ex multiplicatione rationum A ad* B; B *ad* C. *Quia vero per conſtr. ut* B *eſt ad* X, *ita A eſt ad Z, etiam inverſim Z ad A, ut* X *ad* B, *hoc eſt per conſtr. ut* B *ad* C; *Igitur permutando ut Z eſt ad* B, *ita A eſt ad* C. *Sed jam oſtenſum rationem* Z *ad* B *produci ex multiplicatione rationum A ad* B; B *ad* C. *Ergo etiam ratio A ad* C *producitur ex multiplicatione rationum A ad* B; & B *ad* C. *Atqui num.* XI. *oſtenſum eſt rationes componi ex iiſdem rationibus, ex quarum multiplicatione producuntur. Ergo ratio A ad*

ad C componitur ex rationibus A ad B, & B ad C.

Eodem modo demonſtrabitur ratio A ad D componi ex rationibus A ad C, & C ad D. Ergo ratio A ad D componitur ex rationibus A ad B, & B ad C, & C ad D. Et ſic deinceps in infinitum. Quod erat demonſtrandum.

Demonſtratur in numeris.

EAndem prorſus demonſtrationem valere in numeris jam oſtendam, unde etiam veritas illius, ac ſoliditas magis ſtabilietur.

	$\frac{8}{3}$	
8	2	$\frac{4}{3}$
4	1	
3	$\frac{3}{4}$	

Dati ſint tres numeri quicumque exem. gr. 8, 4, 3. Fiat ut 4 ad 8. ita 1 ad 2. & ut 4 ad 3. ſic 1. ad $\frac{3}{4}$. Erunt a *Per 22. l. 5.* *igitur rationes 8 ad 4 & 2 ad 1. item rationes 4 ad 3. & 1 ad $\frac{3}{4}$. inter ſe æquales; eritque ex æquo* a *etiam ratio 8 ad 3 æqualis rationi 2 ad $\frac{3}{4}$.*

Fiat deinde ut $\frac{3}{4}$ ad 1. ita 1. ad $\frac{4}{3}$: eruntque rationes 2 ad 1. & 1 ad $\frac{4}{3}$ (hoc eſt rationes 8 ad 4 & 4 ad 3.) reductæ ad duas rationes 2 ad 1 & b *Patet ex num. 2.* *$\frac{4}{3}$ ad 1. habentes commune conſequens unitatem; ac proinde 2 & $\frac{4}{3}$ erunt* b *raionum 8 ad 4. & 4 ad 3. denominatores. Multiplicentur jam per invicem denominatores 2 & $\frac{4}{3}$ hoc eſt fiat ut 1 ad $\frac{4}{3}$. ita 2 ad $\frac{8}{3}$. Erunt $\frac{8}{3}$ productum ex 2 & $\frac{4}{3}$ denominatoribus rationum 8 ad 4. & 4 ad 3. inter ſe multiplicatis. Ergo ratio hujus producti*

c Patet ex num.

ducti $\frac{8}{3}$. *ad* 1. *eſt ea*, c *quæ producitur ex multiplicatione rationum* 8. *ad* 4. & 4. *ad* 3. *Iam vero quia per conſt. ut* 1. *eſt ad* $\frac{4}{3}$ *ita* 2. *eſt ad* $\frac{8}{3}$. *erit etiam inverſim* $\frac{8}{3}$ *ad* 2. *ut* $\frac{4}{3}$ *ad* 1. *Sed rurſum per conſt.* $\frac{4}{3}$. *ſunt ad* 1. *ut* 1. *ad* $\frac{3}{4}$. *Ergo* $\frac{8}{3}$. *ſunt ad* 2. *ut* 1. *ad* $\frac{3}{4}$. *Ergo permutando* $\frac{8}{3}$. *ſunt ad* 1. *ut* 2. *ad* $\frac{3}{4}$. *Sed jam oſtendi rationem* $\frac{8}{3}$. *ad* 1. *eſſe eam quæ producitur ex multiplicatione rationum* 8. *ad* 4. & 4. *ad* 3. *Ergo etiam ratio* 2. *ad* $\frac{3}{4}$. *eſt ea quæ producitur ex multiplicatione rationum* 8. *ad* 4. & 4. *ad* 3. *Sed oſtenſum eſt ſupra rationem* 2. *ad* $\frac{3}{4}$. *parem eſſe rationi* 8. *ad* 3. *Ergo etiam ratio* 8. *ad* 3. *producitur ex multiplicatione rationum* 8. *ad* 4. & 4. *ad* 3. *Igitur per num. XI. ratio* 8. *ad* 3. *ex rationibus* 8. *ad* 4. & 4. *ad* 3. *compoſita eſt. Quod erat demonſtrandum.*

8 *Eodem modo demonſtrabitur ſi plu-*
4 *res dentur numeri quam tres, rationem*
3 8. *ad* 25 *componi ex rationibus* 8 *ad tria*
25 (*hoc jam eſt ex rationibus* 8 *ad* 4. & 4.
73 *ad* 3) & *ex ratione* 3 *ad* 25: & *ratio-*
nem 8 *ad* 73 *componi ex rationibus* 8 *ad* 25 (*hoc jam eſt ex rationibus* 8 *ad* 4, 4 *ad* 3 3 *ad* 25) & *ratione* 25 *ad* 73. & *ſic in infinitum.*

XIII.

XIII.

Si dentur quotcunque rationes, A ad B, C ad D, E ad F: Exhibebitur ratio ex omnibus compoſita. Fig. 36.

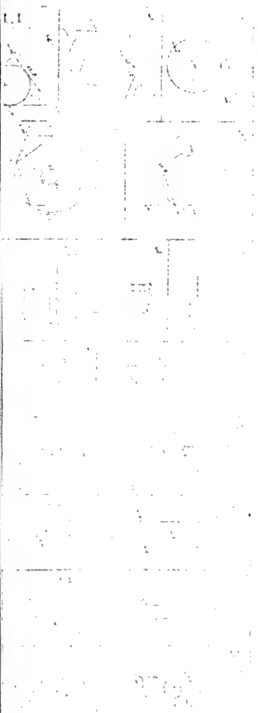
Si fiat ut A ad B, ita quæpiam G ad H, & ut C ad D, ita H ad I, & ut E ad F, ita I ad K: ratio enim G ad K erit compoſita ex rationibus G ad H, H ad I, I ad K, ut num. præced. demonſtravimus, hoc eſt per conſtr. ex rationibus datis A ad B; C ad D; E ad F.

XIV.

Ratio non eſt æqualis rationibus ex quibus componitur.

Inter duas quantitates G, K, aliæ quantitates interponantur, ſive illæ ſint continuè proportionales ſive non: ratio primæ G ad ultimam K non eſt æqualis rationibus intermediis G ad H, H ad I, I ad K, licet ex iis ſit compoſita. Nam ex iis, componi idem eſt, quod produci ex earum multiplicatione mutua, ut oſtenſum eſt num. XI. Cum igitur ratio G ad K ſit producta ex rationibus G ad H, H, ad I, I, ad K inter ſe multiplicatis, ut ex demonſtratione num. 12. patet, non poſſunt rationes G ad H, H ad I, I ad K ſimul ſumtæ æquales eſſe rationi G Fig. 38.

ad K, niſi cum per accidens rationum additio & multiplicatio eandem effecerint rationem. Ut igitur rationibus dictis habeatur una æqualis, erunt illæ ſibi mutuo addendæ, ut traditur num. 5. & 6. ex qua additione proveniet ratio illis omnibus æqualis; quæ ferè ſemper, ut dixi, erit diverſa ab illa, quæ ex earundem rationum compoſitione, hoc eſt multiplicatione exſurget.



Digitized by Google

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ

LIBER VI.

PRoportionum doctrina libro quinto univerſim expoſita, in ſexto figuris planis applicatur. Et ſunt quæ hoc libro traduntur adeò ſcitu neceſſaria, ut ſine illis arcana Geometriæ penetrare, fructuſque ſuaves Matheſeos percipere nemo poſſit: Ad propoſitiones propè ſingulas oporteret encomium texere: tanta omnium utilitas eſt.

DEFINITIONES.

1. SImiles figuræ ſunt, quæ & ſingulos angulos ſingulis æquales habent, & latera, quæ æqualibus angulis opponuntur, vel quæ inter æquales angulos exiſtunt, vel quæ ſunt circa æquales angulos (Eodem omnia recidunt) proportionalia.

Ut triangula X, Z dicentur ſimilia, ſi angulus A ſit æqualis angulo F, & angulus B, angulo L, & angulus C angulo I: atque inſuper ſi AB ſit ad FL, ut BC ad LI: & BC ad LI, ut CA ad IF: & CA ad IF, ut AB ad FL; Comparando ſemper la- *Fig. 7. l. 6. tabula. 4.*

 tera

tera æqualibus angulis oppoſita. Eodem modo aliarum figurarum rectilinearum omnium ſimilitudo explicabitur.

Fig. 19. 2. Reciprocæ figuræ ſunt, cum in utraque antecedentes & conſequentes rationum termini fuerint.

Ut in parallelogrammis X, Z,
ſi A C *ſit ad* C B,
ut F C *ad* C L

antecedentia ſunt A C & F C, *quorum in utrâque figurâ unum eſt; & conſequentia ſunt* C B & C L, *quorum ſimiliter in quâque figurâ unum eſt; parallelogramma proinde* X, Z, *reciproca dicuntur. Idem de aliis figuris intellige.*

3. Altitudo figuræ eſt perpendicularis à vertice ad baſim deducta. Eſt Euclidi. 4.

Fig. 1. *Vt trianguli* A B C *altitudo eſt perpendicularis* A Q, *à vertice cadens in baſim* B C, *vel intra triangulum, vel extra in baſim protractam. Baſis autem & vertex aſſumuntur ad libitum.*

4. Similes arcus circulorum dicuntur, qui eandem habent ad totas ſuas circumferentias rationem.

Vt ſi ambo ſint ſuæ circumferentiæ pars tertia, vel quarta &c.

PROPOSITIO PRIMA.

Fig. 2. T*Riangulo* (A B C, D E F) *et parallelogramma)* A O P C, D Q R F) *quæ ean-*

eandem habent altitudinem, ſive inter eaſdem exiſtunt parallelas, eam inter ſe proportionem habent, quam baſes (A C, D F.)

Ab hoc theoremate dependet totus ſextus liber, imò quidquid uſpiam de figuris ſive planis, ſive ſolidis per proportiones demonſtratum eſt. Demonſtrat illam Euclides per multiplices, quæ in primo ſtatim aditu huius libri tyrones perturbant. Aliam igitur demonſtrationem dabimus facillimam ex theor. 5. partis ſecundæ lib. 5. hunc in modum.

Sumatur baſeos D F quævis pars aliquota, ex. gr. D G una tertia, & ducatur recta G E, erit etiam triangulum D E G tertia pars trianguli D E F, ut colligitur ex 38. l. 1. Quare recta D G & triangulum D G E ſunt conſequentium *a* ſimiles aliquotæ. Auferatur deinde D G ex baſi A C quoties poteſt, puta ſexies, ducanturque rectæ H B, I B, K B, L B, M B, N B. Quoniam C H, H I &c. æquales ſunt ſingulæ ipſi D G, etiam ſex triangula C B H, H B I &c. triangulo D E G æqualia *b* erunt ſingula. Ergo quoties D G continetur in antecedente A C, toties triangulum D E G continetur in antecedente A B C. Eodem diſcurſu oſten-

a Per deſin. 7. l. 5.

b Per 38. l. 1.

oſtendam quaſcunque conſequentium (baſeos D F & trianguli D E F) ſimiles aliquotas in antecedentibus, (baſi A C & triangulo A B C,) æquali numero contineri. Ergo per theor. 5. partis ſecundæ lib. 5. ut baſis A C ad baſim D F, ita triangulum A B C ad triangulum D E F. Quod erat demonſtrandum.

c Per. 41. l. 1. Quoniam vero parallelogramma A P, D R ſunt dupla *c* triangulorum A B C, D E F, etiam illa erunt inter ſe ut baſes.

Corollarium.

Fig. 3. TRiangula (A B C, F I L) & parallelogramma, æquales baſes (A C, F L) vel eandem, habentia, eam inter ſe rationem habent quam altitudines (B O, I Q.)

Fiant enim Q S, O R æquales æqualibus baſibus F L, A C. Erunt igitur etiam Q S, O R inter ſe æquales. Duc S I, R B. Si in triangulis O B R, Q I S accipiantur B O, I Q, tanquam baſes, erunt O R, Q S, eorum altitudines: quæ cum ſint æquales, erunt triangula O B R, Q I S inter ſe, ut *a* baſes B O, I Q. Sed quia ex conſtr. O R par eſt A C, & Q S par F L, triangula O B R, Q I S æquantur *b* triangulis A B C, F I L. Ergo etiam triangula A B C, F I L ſunt inter ſe ut B O ad Q I.

a Per 1. l. 6.

b Per 38. l. 1.

PRO-

PROPOSITIO II.

SI ad unum trianguli latus (B C) ducta fuerit (F L) parallela, hæc ſecabit proportionaliter latera, (hoc eſt A F erit ad F B, ut A L ad L C.) Fig. 4.

Et ſi recta (F L) ſecuerit latera (B A, C A) proportionaliter, erit ad reliquum latus (B C) parallela.

Pars. 1. Ducantur B, L C F. Quoniam F L ponitur parallela B C, erunt triangula F B L, L C F, eandem baſim F L habentia, inter *a* ſe æqualia. Ergo triangulum X, ad utrumque eandem *b* habet rationem, hoc eſt trianguli X eſt ad triang. F B L, ut triangul. Idem X eſt ad triang. L C F. Sed triangulum X eſt ad triang. F B L, ut *c* A F ad F B: & triangulum X eſt ad triang. L C F, ut *d* A L ad L C. Ergo *o* etiam A F eſt ad F B ut A L ad L C. Quod erat demonſtrandum.

a *Per 37. l. 1.*
b *Per 7. l. 5.*
c *Per præc.*
d *Per eand.*
o *Per 11. l. 5.*

Pars 2. Ut A F eſt ad F B, ita triangulum X *e* eſt ad triangulum F B L; & ut A L eſt ad L C, ita *f* triangulum X eſt ad triang. L C F. ſed jam ponitur A F ad F B, ut A L eſt ad L C. Ergo triang. X eſt *k* ad triang. F B L, ut idem X eſt ad L C F. Ergo *g* triangula F B L, L C F, eandem habentia baſim, æquan-

e *Per præc.*
f *Per eand.*
k *Per 11. l. 5.*
g *Per 9. l. 5.*

i Per 39. l. 1. æquantur. Ergo F L, B C *i* ſunt parallelæ. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

Fig. 5. SI ad unum trianguli latus (B C) ductæ fuerint plures parallelæ(I O, F L,)erunt omnia laterum ſegmenta, proportionalia.

Ducatur F Q parallela A C. Rectæ F S, o Per 34. l. 1. S Q æquantur *o* L O, O C. Sed B I eſt ad b Per 2. l. 6. I F, ut *b* Q S ad S F. Ergo etiam B I eſt ad I F, ut C O ad O L.

PROPOSITIO III.

Fig. 6. *SI recta (B F) angulum trianguli bifariam ſecans, etiam ſecet baſim (A C,) habebunt baſis ſegmenta (A F, F C) eandem proportionem quam reliqua latera (A B, C B.)*

Et ſi baſeos partes (A F, F C) eandem rationem habuerint quam reliqua latera (A B, C B) recta (B F) baſim ſecans, angulum oppoſitum (A B C) biſecabit.

Pars 1. Produc C B, donec B L fit par B A, & junge A L. Quoniam in triangulo a Per 5. l. 1. Z, latera L B, A B æquantur, anguli *a* quoque L & O æquales erunt. Quia igitur externus

ternus ABC duobus *b* internis L,O æqualis eſt; angulus I, qui per hyp. ipſius ABC dimidius eſt, æquabitur angulo, L. Ergo AL,FB ſunt *c* parallelæ. Ergo in triangulo ACL, AF eſt ad FC, *d* ut LB (hoc eſt AB) ad BC. Quod erat demonſtrandum. b *Per 32. l. 1.* c *Per 29. l. 1.* d *Per 2. l. 6.*

Pars 2. Produc iterum CB donec LB ſit par AB. Quoniam ponitur ut AF eſt ad FC, ita AB (hoc eſt LB) eſſe ad BC, erunt AL, FB *e* parallelæ. Ergo externus I, eſt par *f* interno, L, & alternus Q æqualis alterno O. Sed quia LB, AB æquales ſunt, anguli *o* L & O ſunt æquales. Ergo etiam I & Q æquales ſunt. biſectus ergo eſt ABC. Quod erat demonſtrandum. e *Per 2. l. 6.* f *Per 27. l. 1.* o *Per 5. l. 1.*

PROPOSITIO IV.

Triangula ſibi mutuo æquiangula, ſunt ſimilia; hoc eſt, o etiam latera æqualibus angulis oppoſita, habent proportionalia. o *Def. 1. l. 6.*

IN trianguliis X, Z, angulus A ſit par angulo F, & angulus C angulo L, & angulus B angulo I. Dico AB eſſe ad FI, ut AC ad FL; & AC eſſe ad FL, ut CB ad LI; & CB eſſe ad LI, ut BA ad FI. *Fig. 7.*

Dem. ſi angulus F ponatur ſupra ſibi æqualem A, latera FI, FL, cadent ſupra latera *Fig. 7. & 8.*

tera

a Fig. 8. S la. tera A B, A C. Et quia *ſ* angulus externus
a Per 29. l. 1. A I L per hypoth. par eſt interno B, erunt
b Per 2. l. 6. *a* I L, B C parallelæ. Ergo *b* B I eſt ad I A,
c Per 18. l. 5. ut C L ad L A. Ergo *c* componendo B A eſt ad I F ut C A ad L F. Quod ſi angulus L imponatur Angulo C, eodem modo oſtendam A C eſſe ad F L, ut B C ad I L: & ſi angulus I, imponatur angulo B oſtendetur pari modo, B C eſſe ad I L, ut A B ad F I. Liquet ergo propoſitum.

Corollaria.

Fig. 8. 1. SI in triangulo ducatur uni lateri (B C) parallela (L I) erit triangulum L F I ſimile toti C F B, ac proinde C F eſt ad L F, ut B C ad L I.

Nam quia L I, B C, parallelæ ſunt, erunt
q Per 27. l. 6 *q* externi F I L, F L I, pares internis B & C: F verò utrique triangulo eſt communis. Ergo ſunt æquiangula. Ergo latera C F, L F oppoſita æqualibus angulis B & F I L, ſunt
r. Per præc. *r* proportionalia lateribus B C, L I, quæ opponuntur communi angulo F.

2. Si in triangulo parallelas A C, L O
Fig. 9. ſecet recta B F, ab angulo oppoſito B ducta, ſecabit eas proportionaliter.

Nam per coroll. 1. A F eſt ad L I ut F B ad I B; & F C quoque eſt ad I O, ut F B ad
d Per 11. l. 5 I B. Ergo A F eſt ad L I ut *d* F C ad I O.

Igi-

Igitur permutando A F eſt ad F C *c* ut L I ad I O. *c Per 16. 15.*

PROPOSITIO V.

SI duo triangula habuerint omnia latera ſibi mutuo proportionalia etiam ſibi mutuo æquiangula erunt. *Fig. 10.*

Hoc eſt, ſi A B ſit ad R F, ut A C ad R Q; & ut A C ad R Q, ſic C B ad Q F, & ut C B ad Q F, ſic A B ad R F: dico angulos antecedentibus oppoſitos æquari angulis, qui opponuntur conſequentibus. Nimirum C ipſi I: B ipſi F, A ipſi O.

Ang.	Antec.	Conſeq.	Ang.
C.	A B	R F	I
B	A C	R Q	F
A	C B	Q F	O

Angulis A & C fac æquales X & Z: & latera coeant in N. Etiam igitur *b* B & N æquales erunt. Quia ergo triangula P, T, ſunt æquiangula, erit *o* A B ad R N, ut A C ad R Q. Sed ex hyp. etiam eſt A B ad R F, ſicut A C ad R Q. Ergo A B eſt ad R F, ut eadem A B ad R N. Ergo R N, R F *c* æquantur. Pari modo oſtendam æquari Q N & Q F. Triangula igitur T, S, ſibi mutuo ſunt æquilatera. Igitur anguli I, F, O *b Per coroll. 9. p. 32. l. 1.* *o Per prac.* *c Per 9. l. 5.*

æquan-

PROPOSITIO VIII.

IN triangulo rectangulo perpendicularis (B C) ab angulo recto in baſim ducta ſecat triangulum in partes toti, & inter ſe ſimiles.

In triangulis ABF, & L, angulus F communis eſt, anguli vero A B F, & X per hypotheſim ſunt recti, adeoque æquales. Ergo reliqui A & O etiam *a* æquales erunt. Ergo *b* triangula ABF & L ſimilia ſunt. Eodem modo ſimilia oſtendam eſſe triangula ABF & R, angulumque I, parem angulo F. Ex quo jam patet etiam R & L ſimilia eſſe, cum æquales ſint anguli I & F : O & A : V & X. Quod erat demonſtrandum. *Fig. 11.* a *Per coroll. 9 p. 36. l. 1.* b *Per 4 l. 6.*

Corollaria.

PRimo BC eſt media proportionalis inter A C, CF.

Cum enim ſint in triangulis R & L

æqu. ang. I. F.	æqu. ang. A. O
lat. opp. A C. CB.	lat. opp. C B. C F.

Patet *c* AC eſſe ad CB, ut CB eſt ad CF. c *Per 4.*

2. BF eſt media proportionalis inter AF & C F. Item A B eſt media inter F A, & C A.

Nam in triangulis A B F & L ſunt

æqu.

æqu. ang. A B F, X.	æqu. ang. A. O.
lat. opp. A F. B F.	lat.opp. B F.C F.

d Per eand. Ergo A F eſt *d* ad B F; ut B F ad C F. Similiter quia in triangulis ABF,& R, ſunt

æqu. ang. A B F. V.	æqu. ang. F. I.
lat. opp. A F. A B.	lat.opp. A B. A C.

Erit rurſum AF ad A B, ut A B ad AC.

PROPOSITIO IX.

Fig. 12. *Datam rectam (A B) dividere ſecundum datam proportionem (F I ad I L.)*

Ducatur infinita AZ. Ex qua ſume AQ. QR æquales F I, I L. Ex R duc R B. Huic ex Q duc Q C parallelam. Dico factum.
Patet ex p. 2. l. 6.

PROPOSITIO X.

Fig. 13. *Datam rectam (A B) ſimiliter ſecare, ut altera data (A I) fuerit ſecta (in F, C.)*

Extremitates ſectæ & inſectæ jungat recta I B. Huic ex punctis F, C duc parallelas rectæ ſecundæ A B occurrentes in L; & Q. Dico factum.
Patet ex corollario p. 2. l. 6.

Scho-

Scholium.

Ex hac propoſitione diſcemus rectam datam in quotvis æquales partes ſecare. Cum recta ſecanda AB, faciat quemvis angulum rectâ quæpiam infinita; ex qua circino cape tot æquales partes AC, CF, FI, in quot ſecare placuerit AB. Duc rectam IB; eique parallelas FL, CQ. Dico factum. Fig. 13.

Aliter idem & facilius efficiemus cum Maurolyco hunc in modum: Sit AB triſecanda. Duc ad AB parallelam IX infinitam, ſupra vel infra. Ex IX, ſi eſt infra AB, cape circino tres æquales partes IQ, QR, RS, quæ ſimul maiores ſint quam AB, minores vero ſi IX eſt ſupra. Per I & A, item per S & B duas rectas; quæ concurrant in C. Ex C ad Q & R, ductæ rectæ datam AB triſecabunt. Demonſtratio patet ex coroll. 2. prop. 4. Fig. 14.

Rurſum cum Maurolyco aliter id ipſum ita obtinebimus. Sit quatriſecanda AB. Duc infinitam AX, eique parallelam BZ etiam infinitam. Ex his cape circino partes æquales AL, LO, OQ, & BV, VS, SR, in ſingulis nempè una pauciores, quam deſiderentur in AB; tum rectæ ducantur LR, OS, QV. Hæ quatriſecabunt datam AB. Fig. 15.

Nam quia per conſtr. LO, RS parallelas & æquales, jungunt LR & OS, etiam hæ erunt a parallelæ. Pari modo OS, QV ſunt parallelæ. Ergo cum AQ ſit ſecta in tres æquales partes, etiam erit AI ſecta b in tres æquales. Similiter erit BC ſecta a Per 33. l. 1. b Per corol. p. 2. l. 6.

cta in tres æquales, tota igitur AB ſecta eſt in quatuor æquales.

Hæ duæ praxes ſunt faciliores Euclidæâ, quia pauciores ducendæ ſunt parallelæ.

PROPOSITIO IX.

Fig. 16.

Datis duabus rectis (AB, BC) tertiam proportionalem invenire.

Duc rectam AC. Ex BA producta accipe AF parem BC. Per F ad AC duc parallelam FX infinitam, cui in L occurrat producta BC. Dico AB eſt ad BC, ut BC ad CL.

c Per 2. l.6. b Per conſtr.

Nam AB eſt ad AF, *c* ut BC ad CL. Sed AF eſt *d* par BC. Ergo AB eſt ad BC, ut BC ad CL, adeoque CL eſt tertia proportionalis quæ petebatur.

Aliter.

Fig. 17.

Statuantur AB, BC ad angulum rectum. Junge AC. Ex C duc CX perpendicularem ad AC infinitam, cui in L occurrat AB producta; Dico AB eſt ad BC, ut BC ad BL. Patet ex coroll. 1. prop. 8.

Scholium.

Poterit verò proportio data non ſolum per tres terminos, ſed etiam per infinitos continuari, & tota

tota infinitorum proportionalium terminorum ſumma exhiberi. Pulcherrimè hanc rem, totumque adeò Geometricæ progreſſionis negotium Gregorius à S. Vincentio proſecutus eſt toto libro 2. ſui operis: Nos in gratiam ſtudioſorum ſuccinctam rei propoſitæ conſtructionem, ac demonſtrationem hic exhibebimus.

Lemma 1.

SI ratio minoris inæqualitatis LO ad LR ſemper continuetur, venietur ad quantitatem quàvis datâ majorem. *Fig.* 18. *ſecunda.*

Sit LO ad LR, ut LR ad LQ, &c. Igitur a *invertendo, ut QL ad RL, ſic RL ad OL. Ergo divid.* b *QR ad RL, RO, ut RO ad OL: & permut.* c *QR ad RO, ut RL. ad OL. Sed RL eſt major quam OL. Ergo etiam QR major quam RO. Pari modo oſtendam IQ eſſe majorem quam QR, & ſic deinceps. Quoniam igitur continuando rationem LO ad LR, ad primam, LO, ſemper accedunt partes OR, RQ, QI &c. perpetuo creſcentes, patet veniri ad quantitatem quàvis datâ majorem. Quod erat demonſtrandum.*

a *Per ſchol. p.* 16. *l.* 5
b *Per* 57. *l.* 5.
c *Per* 16. *l.* 5.

Lemma 2.

SI ratio quæcunque majoris inæqualitatis AB ad CB ſemper continuetur, ad quantitatem venietur quàvis datâ minorem. *Fig.* 18. *utraque.*

Data ſit LO quantumvis parva. Fiat a *ut BC ad BA, ſic LO ad LR. Poterit* d *ratio LO ad LR*

a *Per* 9. *l.* 6.
d *Per lem.* 1.

 toties

toties continuari, ut aliquis terminus habeatur, puta L I major quam A B. Quoties vero continuata jam eſt ratio L O ad L R, per totidem terminos C B, E B, F B, continuetur ratio A B ad C B. Erit F B minor quam O L.

Nam ex conſt. patet I L, Q L, R L, O L, eſſe proportionales ipſis A B, C B, E B, F B. Igitur ex æquo, ut e I L ad O L, ſic A B ad F B: & permutando f ut I L ad A B, ſic O L ad F B. Sed I L eſt major g quam A B. Ergo etiam data O L, eſt major quam F B. Quod erat demonſtrandum.

e Per 22. l. 5.
f Per 16. l. 5.
g Per conſtr.

Problema.

Fig. 19.

Data ſit ratio majoris inæqualitatis A C ad B C. Oporteat hanc per infinitos terminos continuare, & omnium ſummam exhibere.

Erigantur perpendiculares A L, B O, æquales datis A B, B C, & per L O ducatur recta concurrens cum A B C productâ, in Z. Dico 1, ſi ex C erigas perpendicularem C Q; erit C Q tertia proportionalis. Q C transfer in C E, & ex E erige E R, erit hæc quarta. E R transfer in E F, & erige F S, erit hæc quinta: atque ita ratio A B ad B C, hoc eſt A L ad B O, per terminos A L, B O, C Q, E R, F S &c. ſive A B, B C, C E, E F, F I &c. in infinitum continuabitur, quia quilibet terminus (ut F S) poterit auferri ex reſiduo F Z; cum enim L A (hoc eſt A B) ſit minor quam A Z, etiam F S erit b minor quam F Z.

b Patet ex corol. 1 p. 4. l. 6.

Dico

Dico 2. *AZ eſt æqualis toti ſummæ infinitarum proportionalium.*

1, *Pars AZ eſt ad BZ, ut* c *AL ad BO; hoc eſt ut AB ad BC: Igitur permutando,* o *AB eſt ad AZ, ut BC ad BZ. Ergo AZ eſt ad BZ* d *ut BZ ad CZ. Sed ut AZ eſt ad BZ, ſic LA eſt ad OB, & ut BZ ad CZ, ita OB ad QC. Ergo etiam LA eſt ad OB, ut OB ad QC. Eodem modo oſtendam OB eſſe ad QC, ut QC ad RE, & ſic deinceps in infinitum.*

c Per idem corol.

o Per 16. l. 5.

d Per corol. 2. p. 18. l. 5.

2. *Pars; Tota ſumma infinitorum terminorum, neque minor eſt quam AZ, neque major; Ergo æqualis. Non eſt major, quia, cum jam oſtenderim ſupra, QC eſſe minorem quam CZ, & RE quam EZ, & SF quam FZ, & ſic deinceps ſine termino, poterunt omnes termini QC, RE, SF &c. ſine fine conſtitui juxta invicem in recta AZ, ſic ut nunquam punctum Z attingatur. Non erit etiam minor quam AZ: quia jam oſtendi ſupra AZ, BZ, CZ eſſe continuè proportionales, & eodem modo idem oſtenditur de reliquis EZ, FZ &c. Cum igitur transferendo proportionales QC, ER, FS &c. in CE, EF, FI reſidua EZ, FZ, IZ &c. ſemper ſint continuè proportionalia, ut jam oſtendimus, venietur tandem ad reſiduum* e *dato minus, ac proinde ſumma proportionalium ſuperabit quantitatem omnem, quæ minor ſit quam AZ, unde ipſa non poteſt eſſe minor quam AZ. Quoniam igitur nec major eſt, nec minor, quam AZ, eidem æqualis erit. Quod erat demonſtrandum.*

e Per lem. 2.

Theorema.

PRimorum terminorum differentia, primus terminus, & tota infinitarum proportionalium ſumma, ſunt continuè proportionales.

Fig. 19. *In ſuperiori figura ducatur O X parallela ad A Z. Igitur L X erit differentia primi termini A L, ſeu A B, & ſecundi B O, ſeu B C. Quoniam X O eſt parallela ad A Z. Erit L X ad X O, ut f L A ad A Z. Sed X O eſt AB, & L A etiam eſt AB. Ergo L X differentia, eſt ad A B primum terminum, ut A B primus terminus ad A Z totam ſummam. Quod erat demonſtrandum.*

f Per coroll. 1 p. 4. l. 6.

Fig. 20. *Idem univerſaliter & breviſſimè demonſtrabitur in omni genere quantitatis hunc in modum. Sint continuè proportionales quæcunque (etiam numeri) A Z, B Z, C Z &c. quæ transferantur omnes in primam A Z. Erunt igitur A B, B C, C E, E F &c. proportionalium differentiæ, quæ una cum poſtrema quantitate I Z, æquantur primæ A Z. Quia verò, ſi proportionales in infinitum continuentur, poſtrema quantitas per lem. 2. evaneſcit, patet infinitarum proportionalium differentias æquari primæ A Z. Deinde, quia eſt A Z ad B Z, ut B Z ad C Z, & ſic deinceps, erit dividendo A B ad B Z, ut B C ad C Z, & p convertendo ut A B prima differentia ad A Z primam quantitatem, ita B C ſecunda differentia ab B Z, quantitatem ſecundam, & ſic deinceps. Ergo ut AB prima differentia ad A Z*

p Per coroll. 1. p. 18. l. 5.

AZ primam quantitatem,q ita omnes differentiæ (hoc eſt, ut jam oſtendi, prima quantitas AZ) ad omnes quantitates, hoc eſt ad totam ſummam infinitarum quantitatum. Quod erat demonſtrandum. q Per 12.l5.

PROPOSITIO XII.

D*Atis tribus rectis (AB, BC, AF) quartam proportionalem invenire.* Fig. 21.

Diſponantur datæ rectæ ut figura monſtrat, & duc rectam BF: cui parallela fiat CZ infinita. Ipſi CZ occurrat AF producta in L.

Dico AB eſt ad BC, ut AF ad FL ut patet ex p. 2. hujus. Ergo FL eſt quarta proportionalis quæſita.

Scholium.

P*Ulchre* Bettinus *noſter in ſuo Ærario Mathematicæ philoſophiæ. Ex 35. l. 3. & 14. hujus, quæ ab hac non dependet; datis tribus quartam, & datis duabus tertiam proportionalem exhibet, hunc in modum.*

Si tres dentur rectæ; ſecunda CB *& tertia* CD *ponantur in directum, quas prima* BA *tangat in* B *ſub quovis angulo. Per puncta* C, A, D, *deſcribe* a *circulum, cui* AB *prima occurrat in* Z, BZ *eſt quarta proportionalis.* Fig. 22. a Per 3. l.4.

μ Per 35.l.3. *Cum enim rectangula A B Z, C B D b æqualia ſint, erit A B ad B C, ut B D ad B Z per 14 hujus, quæ ab hac, ut dixi non dependet.*

Fig. 23. *Si dentur duæ rectæ A B, B C; ſecundæ B C apponatur in directum B D æqualis B C. Dein ipſam C B in B tangat prima A B ſub quovis angulo. Tum reliqua ut ſupra. Erit B Z tertia proportionalis quæſita.*

Demonſtratio ſimilis eſt, cum enim rectangula A B Z, C B D ſint æqualia, erit A B ad B C ut B D (hoc eſt ut B C) ad B Z.

PROPOSITIO XIII.

Fig. 24. *Datis duabus rectis (A C, C B) mediam proportionalem invenire.*

Tota compoſita A B biſecetur in O, & centro O deſcribatur circulus per A & B. ex C erige perpendicularem C F, occurrentem peripheriæ in F.

Dico A C eſt ad C F, ut C F ad C B.

Ducantur enim A F, B F, triangulum a A F B rectangulum eſt, & à recto angulo ducta eſt perpendicularis F C in baſim. Ergo A C ad C F, ut b C F ad C B.

a Per 31.l.3

b Per corol. 1.p.8.l.6.

Corollarium.

Hinc patet ſi ex quovis peripheriæ puncto (I) ducta ſit ad diametrum perpendi-

pendicularis (FC) eam eſſe mediam proportionalem inter diametri ſegmenta (AC, CB.)

Scholium.

Hic locus omnino exigit, ut de duabus mediis proportionalibus inter duas datas inveniendis etiam breviter dicamus aliquid. In hujus problematis ſolutionem, Platonis hortatu, omnes Græciæ Geometræ ſummo ſtudio incubuerunt. Ab Eutocio in comment. in Archim. varii recenſentur ſubtiliſſimi modi, Platonis, Architæ Tarentini, Menechmi, Eratoſthenis, Philonis Byſantii, Heronis, Appollonii Pergæi, Nicomedis, Dioclis, Spori, Pappi: quibus alios deinde addiderunt, Vernetus, P. Gregorius à S. Vincentio, Renatus Carteſius. Ex omnibus viſum eſt tres adferre reliquis faciliores.

Modus Platonis.

Oporteat inter datas AB, BC, duas medias invenire. *Fig. 25.*

Ponatur AB, BC ad rectum angulum & producantur infinitè verſus X & Z. Accipiantur deinde duæ normæ (ita Claudius Richardus noſter; Plato enim unicâ normâ utitur, ſed a cujus lateri DE inſerta ſit regula mobilis per DE) & unius normæ angulus D applicetur rectæ BX, eâ lege, ut & latus unum tranſeat per A, & ad punctum E, in quo latus alterum ſecabit rectam BZ, applicata norma *a Vide Fig. 26.*

ſecun-

ſecunda, tranſeat per C. Dico B D, B E duas eſſe medias inter datas A B, B C: hoc eſt ut A B eſt ad B D, ſic eſſe B D ad B E, & B E ad B C.

Demonſtratio patet ex coroll. 1. p. 8. l. 6. Nam A D E rectangulum triangulum eſt, & ab angulo recto in baſim perpendicularis cadit D B. Ergo per dictum coroll. ut A B ad B D, ſic B D. ad B E: Et ob eandem cauſam, ut B D, ad B E, ſic B E ad B C. Inter datas igitur A B, B C repertæ ſunt duæ mediæ B D, B E. Quod erat faciendum. Hic modus inter omnes intellectu facillimus eſt.

Modus Philonis Byſantii.

Fig. 27. *DUæ datæ A B, B C jungantur ad rectum angulum; tum perficiatur rectangulum A B C D & producantur D A, D C infinitè, ducanturque diametri B D, A C, ſe ſecantes in E. Centro E per B ducatur circulus, qui, quod angulus A B C rectus ſit, tranſibit* b *per A & C.*
b Patet ex 31. l. 3. *Tum regula ſic applicetur ad punctum B, ut interceptæ B G, O F, ſint æquales. Dico A F, G C eſſe duas medias inter datas A B, B C; hoc eſt ut A B eſt ad A F, ſic A F eſſe ad G C, & G C ad C B.*

c Per conſtr. *Demonſt. Quia G B, O F,* c *æquantur, etiam O G, B F æquales erunt. Ergo æqualia ſunt rectangula*
d Per coroll. 1. p. 36. l. 3. *O G B, B F O, hoc eſt rectangula* d *D G C, D F A. Ergo eſt ut G D ad D F,* e *ſic reciprocè A F ad G C.*
e Per 14. qua ab hac nonpendet. *Sed G D; eſt ad D F,* f *ut B A ad A F. Ergo ut B A eſt ad A F, ſic A F eſt ad G C. Rurſum quia jam oſtendi A F eſſe ad G C, ut B A eſt ad A F, eſt vero*
f Per corol. 1 p. 4. l. 6.

BA ad AF, ut GD ad DF, hoc eſt ut GC ad CB; erit quoque AF ad GC, ut GC eſt ad CB. Omnes igitur quatuor BA, AF, GC, CB, ſunt continue proportionales; ac proinde inter datas AB, BC inventæ ſunt duæ mediæ. Quod erat faciendum.

Hi duo modi quamvis ſint ingenioſi & faciles, tamen, quia debita normæ, & regulæ applicatio, non niſi tentando fit; Geometrici non ſunt.

Modus Carteſii.

PAretur inſtrumentum hujuſmodi. Duæ regulæ aperiri poſſint & claudi circa Y. His inſertæ ſint plures normæ inter ſe connexæ in B,C,D,E, F,G, eâ lege ut dum regulæ YX, YZ aperiuntur, norma BC impellat normam GD in regulâ YZ, & norma CD impellat normam DR in regulâ YX. & DE impellat EF, & EF impellat FG; & ſic deinceps: Dum vero regulæ YX & YZ clauduntur, omnia puncta B, C, D, E, F, G, incidant in unum idemque punctum A. Hoc inſtrumento inter duas datas non ſolum duæ, ſed etiam quatuor & ſex, imo quotvis mediæ reperientur. Quod neque per ſectiones conicas, neque per modos ullos ab auctoribus ſupradictis inventos obtineri poteſt. Fig. 28.

Pro duabus mediis opus eſt normis tribus, pro mediis 4. normis 5. & ſic deinceps.

Minor datarum transferatur in regulam YX, & ſit YB; major in regulam alteram YZ, & ſit YE. Applicetur norma prima ad punctum B, ibi-

demque

demque firmetur, & aperiantur regulæ, donec normæ tertiæ latus tranſeat per E. Dica ΥE, ΥD, eſſe duas medias inter datas ΥB, ΥE; hoc eſt ΥB eſſe ad ΥC, ut ΥC eſt ad ΥD, & ΥD ad ΥE.

Demonſtratio manifeſta eſt ex coroll. 2. p. 8. l. 6. Nam ex natura inſtrumenti, in trigono ΥCD angulus ad C rectus eſt, ab eoque cadit CB perpendicularis in baſim ΥD. Ergo per dictum coroll. ut ΥB eſt ad ΥC, ſic ΥC eſt ad ΥD. Rurſum, quia in trigono ΥDE angulus ad D rectus eſt, ab eoque cadit perpendicularis DC in baſim ΥE, erit ut ΥC ad ΥD, ſic ΥD ad ΥE. Sunt igitur ΥB, ΥC, ΥD, ΥE quatuor continuè proportionales. Inter datas igitur ΥB, ΥE inventæ ſunt duæ mediæ ΥC, ΥD. Quod erat faciendum.

Si inter datas ΥB, ΥG petantur 4. mediæ, aperi regulas donec normæ quintæ latus FG tranſeat per G. Erunt ΥC, ΥD, ΥE, ΥF quatuor mediæ inter ΥB, ΥG. Demonſtratio patet ex eod. coroll.

Hic modus, quamvis organum ſit Platonico illo operoſius, planè eximius eſt, tum quia nihil perficit tentando, tum quia ad 4. & 6. imò quotcunque medias ſe extendit.

Per duas medias perficitur problema Deliacum, cubi nimirum duplicatio, & corpora quæcunque in data proportione o augentur, vel minuuntur, quemadmodum idipſum in figuris planis efficitur p per unam mediam. Hanc viam primus aperuit Hippocrates, quam, ut ſingularem & unicam, omnis Geometrarum poſteritas amplexa eſt.

o Vide ſchol. poſt 18. l. 12.

p Vide corol. 3. p. 20. l. 6

PRO-

PROPOSITIO XIV.

P*Arallelogramma æqualia (X,Z) quæ unum angulum (C) uni (O) habent æqualem, etiam latera circa æquales angulos habent reciproca: (hoc eſt A C eſt ad C B, ut F O ad O L.)* Fig. 29. 30.

Et ſi latera ſic habent reciproca, parallelogramma ſunt æqualia,

1. Pars. I L. & S B productæ coucurrant in Q. Parallelogrammum X eſt ad parall. R ut A C. *a* ad C B: & Z eſt ad *b* R, ut F O ad O L. Sed quia per hyp. X & Z æqualia ſunt, X eſt *c* ad R, ut Z eſt ad R. Ergo etiam A C eſt ad C B, *o* ut F O ad O L. Quod erat demonſtrandum. a Per 1. l. 6. b Per eand. c Per 7. l. 5. o Per. 11. l. 5.

Dem. 2. pars, ut A C ad C B, ſic *d* X eſt ad R, & ut F O ad O L, ſic *e* Z ad R. Sed jam per hyp. A C eſt ad C B, ut F O ad O L. Ergo X eſt ad R *o* ut Z eſt ad R. Ergo X & Z æqualia *q* ſunt. d Per 1. l. 6. e Per eand. o Per. 11. l. 5. q Per 9. l. 9.

PROPOSITIO XV.

Æ*Qualia triangula (A C L, F C B) quæ unum angulum (C) uni (O) æqualem habent, etiam latera circa æquales* Fig. 31. 32.

quales

quales angulos habent reciproca, (hoc eſt A C eſt ad C B, ut F O ad O L.)

Et ſi latera ſic habent reciproca, triangula ſunt æqualia.

Ducatur recta L B; reliqua demonſtratio eadem quæ præcedentis.

Corollarium.

TAm parallelogramma, quam triangula, quæ reciprocant baſes & altitudines ſunt æqualia. Et è converſo.

Patet ex duabus præcedentibus.

PROPOSITIO XVI.

Fig. 33. *SI quatuor rectæ (A B, F I, I L, B C) fuerint proportionales (hoc eſt ſi A B ſit ad F I, ut I L ad B C.) Rectangulum (X) ſub extremis (A B, B C) æquale eſt rectangulo (Z) ſub medijs (F I, I L.)*

Et ſi rectang. ſub extremis æquatur rectangulo ſub medijs, erunt illæ quatuor rectæ proportionales.

1. Pars. In rectangulis X & Z, circa rectos angulos, ac proinde æquales B, I, per hyp. eſt A B ad F I, ut reciprocè I L ad C B. Ergo *a* X & Z æqualia ſunt. Quod erat demonſtrandum.

a Per 14. l. 6

2. Pars.

2. Pars. Quoniam X & Z iam ponuntur æqualia; Ergo *b* circa æquales angulos B & I, eſt A B ad F I, ut reciproce I L ad B C. Quod erat demonſtrandum. *b. Per eand.*

PROPOSITIO XVII.

SI tres rectæ (AB, F L, B C) fuerint proportionales, rectangulum ſub extremis (A B, B C) æquale erit quadrato mediæ (F F.) *Fig. 34.*

Et ſi rectangulum ſub extremis æquatur quadrato mediæ, erunt tres illæ rectæ proportionales.

1. Pars. Mediæ F L accipiatur par O. Quoniam igitur per hyp. A B eſt ad F L, ut F L ad B C, eſtque O par F L. Erit quoque A B ad F L, ut O ad B C. Ergo *o* rectang. ſub extremis A B, B C æquatur rectangulo ſub mediis F L & O, hoc eſt quadrato F L. *o Per præc.*

2. Pars. Demonſtratur ſimiliter ex ſecundâ parte præcedentis.

Corollarium.

EX hac & ex 13. patet, ſi in circulo ſit F C perpendicularis diametro, rectangulum A C B æquale eſſe quadrato F C. *Fig. 24.*

PRO-

PROPOSITIO XVIII.

Fig. 35. *SVper data recta (R S) dato polygono B Q ſimile ſimiliterque poſitum deſcribere.*

Polygonum datum B Q reſolve in triangula. Super data recta R S fac *a* angulos R, O æquales angulis B, A. Coibunt latera in X. Super XS fac angulos V I, æquales angulis T, C. Coibunt latera in Z. Dico factum. Nam quia anguli, R, O æquantur angulis B, A, etiam E, K *b* æquales erunt: & quia etiam *c* V æquatur T; totus E V toti K T æqualis erit. Similiter quia *d* ſinguli O, I æquantur ſingulis A & C, toti O I, A C æquales erunt. Et quia *e* V & I, æquantur T & C, etiam Z & Q æquales *f* ſunt. Polygona igitur R Z, B Q ſibi mutuo æquiangula ſunt. Reliquum eſt ut oſtendatur etjam latera eſſe proportionalia. R S eſt ad B F *g* ut SX ad F L: & rurſum S X eſt ad F L, *h* ut S Z ad F Q. Ergo ex æquo *i* R S eſt ad S Z, ut B F ad F Q. &c.

a Per 23. l. 1.
b Per corol. 9. p. 32. l. 1.
c Per conſtr.
d Per conſtr.
e Per conſtr.
f Per coroll. 9. p. 32. l. 1.
g Per 4. l. 6.
h Per eand.
i Per 22. l. 1.

PROPOSITIO XIX.

Fig. 36-37. *TRiangulorum (X, Z) ſimilium proportio eſt duplicata proportionis laterum (A C, F I) æqualibus angulis ſubtenſorum.*

Hoc

Hoc eſt, ſi *a* fiat ut A C ad F I ſic F I ad tertiam A Q; triang. X eſt ad triang. Z, ut A C prima ad tertiam proportionalem A Q. Vide defin. 10. 5. a Per. 11. l. 6.

Quoniam triangula X, Z ſunt ſimilia, erit B A ad L I, *b* ut A C ad I F. Sed per conſtr. ut A C ad I F, ſic I F ad A Q. Ergo etiam B A eſt ad L I, *c* ut I F ad A Q. Ergo in triangulis Q B A & Z, latera circa angulos A, I, qui per defin. triangulorum ſimilium æquales exiſtunt, ſunt reciproca. Æquantur igitur *d* Q B A & Z. Atqui triangulum X ad Q B A eſt ut *e* baſis A C ad baſim A Q. Ergo etiam X eſt ad Z, ut A C ad A Q. Quod erat demonſtrandum. b Per 4 l. 6. c Per 11. l. 5. d Per 15 l. 6. e Per 1. l. 6.

PROPOSITIO XX.

Similia polygona (A B C D E, F G H I K) dividuntur (1) in ſimilia triangula (P, S & Q, T, & R, V) numero æqualia: (2) & totis proportionalia (3) & polygonorum proportio duplicata eſt proportionis laterum (A B, F G) inter æquales angulos (B, G & B A E, G F K) exiſtentium. Fig. 38.

1. Pars. Quoniam polygona ſunt ſimilia, erunt *a* ſibi mutuo æquiangula, eruntque bini binis æquales anguli B A E, G F K, & a Per. def. 1. l. 6.

b *Per eand.* B,G, & B C D,G H I, & C D E, H I K, & E,K. Quia igitur A B eſt ad B C, *b*ut F G ad G H, anguliique B & G æquales ſunt, ſi-
c *Per 6. l. 6.* miliaᶜſunt triangula P, S. Similiter demonſtrabitur ſimilia eſſe R & V. Deinde quia toti B C D, G H I, & ablati B C A, G H F æquales ſunt, etiam reliqui A C D, F H I æquales erunt, Eodem modo oſtendam æ-
d *Per cor. 9. 1. p. 32. l. 1.* quari A D C, F I H, Ergo *d* tertius C A D
e *Per 4. l. 6.* tertio H F I æqualis eſt. Quare *e* etiam Q & T triangula ſimilia ſunt. Liquet ergo 1. Pars.

Pars 2. Quoniam ſimilia ſunt P & S, ra-
f *Per prac.* tio P ad S duplicata eſt *f* rationis C A ad H F. Sed ob eandem cauſam etiam ratio
g *Per 34. l. 5.* Q ad T duplicata eſt rationis C A ad H F. Ergo P eſt ad S ut *g* Q ad T. Eodem modo oſtendam ut Q eſt ad T, ita R eſſe ad V.
i *Per 12. l. 5.* Ergo ut *i* unum antecedens P eſt ad unum conſequens S, ita omnia antecedentia P, Q, R ſimul ſumta, ad omnia conſequentia S, T, V ſimul ſumta, hoc eſt polygonum ad polygonum. Quod erat alterum.

k *Per prac.* 3. Pars. Ratio P ad S eſt *k* duplicata rationis A B ad F G. Sed ratio polygoni ad polygonum eſt eadem cum ratione P ad S, ut jam oſtendi. Ergo etiam ratio polygoni ad polygonum eſt duplicata rationis A B ad G F. Quod erat tertium.

Corol-

Corollaria.

1. Omnes figuræ ordinatæ ſeu regulares, ut æquilatera triangula, quadrata pentagona &c. ſunt inter ſe in ratione duplicata laterum. Omnes enim ordinatæ ſunt ſimiles inter ſe, ut patet ex def. 1. 6.

2. Si figurarum quarumvis ſimilium latera AB, FG inter æquales angulos poſita, ſint nota, etiam proportio figurarum innoteſcet. Sit ex. gr. AB 2. ped. & FG 6. pedum, fiat ut 2. ad 6. ita 6. ad alium numerum nempe 18. Figura minor eſt ad majorem, ut 2. ad 18. ſeu ut 1. ad 9. Invenitur autem tertius proportionalis numerus, ſi ſecundus datorum multiplicetur per ſeipſum, & productus per primum dividatur. *Fig. 38.*

3. Ex eadem propoſitione elicitur methodus præclara, figuram quamvis rectilineam augendi vel minuendi in ratione data: ut ſi velim pentagoni, cujus latus eſt AB, aliud facere quintuplum. Inter terminos rationis datæ A C, B C, inveni *m* mediam proportionalem B X. ſuper hac conſtrue *n* pentagonum ſimile dato. Hoc erit quintuplum dati. *Fig. 39.* m *Per 13, l. 6.* n *Per 18, l. 6.*

Nam per 20. pentagonum AB eſt ad ſibi ſimile BX, ut A B prima ad B G tertiam.

Porrò cum etiam circulorum proportio ſit duplicata proportionis diametrorum, (ut

oſtendetur p.2.l.12. Hæc praxis ad circulos quoque pertinebit.

PROPOSITIO XXI.

Fig. 40. *Figuræ (A,B) quæ eidem (C) ſimiles ſunt, etiam ſibi mutuo ſimiles ſunt.*

Patet ex defin. 1.l.6. ex axiom. 1.l.1.& propoſ, 11.l. 5.

PROPOSITIO XXII.

Fig. 40, & 41. *SI quatuor aut plures rectæ (F I, L Q; & O R, S V) proportionales fuerint, figuræ ſimiles, ſimiliterque ab iis deſcriptæ (A,B, & E, K) proportionales, erunt. Et è converſo.*

a Per 19. & 20. l. 6. Demonſtratio primæ partis patet ex 34. 5. Quoniam enim *a* rationes A ad B, & E ad K ſunt duplicatæ rationum F I ad L, Q, & O R ad S V, ex hypotheſi æqualium, etiam ipſæ æquales erunt.

Pars 2. patet ex 35.l. 5.

PROPOSITIO XXIII.

Fig. 41. *ÆQuiangula parallelogramma (X, Z) inter ſe rationem habent compoſitam ex rationibus laterum (A C ad C B, & L C ad C F.)*

Hoc

Hoc eſt, ſi fiat C B ad O, ut L C ad CF; X eſt ad Z, ut A C ad O. Vide quæ demonſtravimus l. 5. parte 3. num. 13.

Concurrant I L, S B in Q. Parallelogrammum X eſt *b* ad parallelogrammum R ut A C ad C B: & R eſt ad Z, *c* ut L C ad C F (hoc eſt ut C B ad O.) Ergo *d* ex æquo X eſt ad Z, ut A C ad O. Quod erat demonſtrandum. b *Per 1. l. 6.* c *Per eand.* d *Per 22. l. 5*

Corollaria.

HInc & ex 34. l. 1. patet primo. Triangula quæ unum angulum (ad C) æqualem habent, rationem habere compoſitam ex rationibus rectarum A C ad C B, & L C ad C F æqualem angulum continentium. *Fig. 42.*

Patet 2. rectangula, ac proinde & parallelogramma quæcunque, rationem inter ſe habere compoſitam ex rationibus baſis ad baſim & altitudinis ad altitudinem. Neque aliter de triangulis ratiocinaberis.

Patet 3. Quo modo triangulorum ac parallelogrammorum proportio exhiberi poſſit. Sunto parallelogramma, X & Z, & eorum baſes A C, C B, altitudines C L, C F. fiat *e* ut C L altitudo ad altitudinem C F, ita baſium altera C B ad O, parallelogrammum X eſt ad parallelogram. Z ut A C eſt ad O. *Fig. 42.* e *Per 12. l. 6.*

PROPOSITIO XXIV.

Fig. 45. *IN omni parallelogrammo (S F.) quæ circa (A B) diametrum ſunt parallelogramma (C L, O I) & toti & inter ſe ſimilia ſunt.*

Per 27.1. æquales ſunt anguli C,S,&,L, F. Per eandem E eſt par I,hoc eſt per eandem ipſi A;B verò & toti SF,& parti CL communis eſt. Igitur totum SF & pars CL æquiangula ſunt. Reliquum eſt,ut etiam latera æqualibus angulis oppoſita habeant proportionalia.

c Per coroll. 1.p.4.l.6. e Per idem corol. f Per 22.l.5. l Per defin. 1.l.6. n Per 21.l. 6.

Quoniam in triangulis B C E,BSA, eſt C E parallela ad S A, erit *c* B C ad C E,ut B S ad S A; & C E eſt ad E B, ut *e* SA ad AB. Quia vero in triangulis quoque ELB, A F B, E L eſt parallela ad A F,erit F B ad E L, ut *i* A B ad A F. Ergo ex æquo *f* C E eſt ad E L, ut S A ad A F. Igitur *l* C L & totum S F ſimilia ſunt. Eodem modo oſtendam O I eſſe ſimile toti S F. Ergo *n* C L & O I ſunt etiam ſimilia inter ſe. Quæ erant demonſtranda.

PROPOSITIO XXV.

Fig. 46. *POlygonum datum (A) in aliud dato (B) ſimile tranſmutare.*

Sive

Sive polygonum conſtituere æquale dato A, & ſimile alteri dato B,

Super C F latere polygoni B, cui ſimile petitur, fac rectangulum Q *a* æquale B. Deinde ſuper FS fac *b* rectangulum R æquale A. Manifeſtum eſt C F & F I eſſe in directum. Inter CF, FI inveni *c* mediam proportionalem F L. Super hac fac *d* polygonum ſimile dato B, erit hoc etiam æquale dato A. a *Per 44. l. 1.* b *Per eand.* c *Per 13. l. 6.* d *Per 18. l. 6.*

Nam cum per conſtr, ſint tres proportionales C F, F L, FI, polygonum B eſt ad ſimile ſibi polygonum ſuper FL factum *e*, ut C F ad F I; hoc eſt *i* ut Q ad R. Igitur permutando ut polygonum B eſt ad Q, ita polygonum ſuper F L eſt ad R. Sed per conſtr. polygonum B æquatur Q. Ergo etiam polygonum ſuper F L, ſimile ipſi B, æquatur R, hoc eſt per conſtruct. dato A. Factum eſt igitur quod petebatur. e *Per 20. l. 6. & defin. 10. l. 5.* i *Per 1. l. 6.*

PROPOSITIO XXVI.

Parallelogramma ſimilia B D, F N) habentia angulum communem (A) circa eandem diametrum exiſtunt.

Duc rectas AE, C E, ſi negas A E C eſſe diametrum communem parallelogrammorum *Fig. 44.*

rum BD,& F N;ipſius BD diameter eſto recta alia A G C ſecans F E in G, & duc parallelam G H. Parallelogramma igitur F H, B D exiſtent circa communem diametrum A G C,ac proinde *a* erunt ſimilia. Ergo ut B A ad A D,*b* ſic F A ad A H. Sed etiam ut B A ad A D, ſic F A ad AN,cum B D, F N ſimilia ſint per hyp. Ergo F A eſt ad A H, ut F A ad AN. Quod eſt abſurdum.

a Per 24. l. 6.
b Per defin. 1. l. 6.

PROPOS. XXVII. XXVIII. XXIX.

Tyronibus faceſſunt negotium, & nullius ferè ſunt uſus.

PROPOSITIO XXX.

Fig. 45.

Datam rectam (A B) ita ſecare, ut tota (A B) ſit ad unum ſegmentum (A C,) ſicut idem ſegmentum eſt ad reliquum (C B.)

Hoc eſt (ut loquuntur Geometræ) lineam extremâ ac mediâ ratione ſecare.

Per 11. 2. ita ſeca AB in C,ut rectangulum ſub A B,B B,ſit æquale quadrato A C. Dico factum.

Erit enim per 17.ut AB ad AC, ſic AC ad CB.

Hujus

Huius ſectionis vis admirabilis eſt in corporum regularium inſcriptione & comparatione.

PROPOSITIO XXXI.

SI à lateribus trianguli rectanguli (ACB) figuræ ſimiles quæcunque deſcribantur, erit ea quæ opponitur recto angulo duabus ſimul reliquis (L, R,) æqualis. Fig. 47.

Propoſitio igitur 47. l. 1. hîc redditur univerſalis.

Ab angulo recto C demittatur perpendicularis CO. Quoniam AB, BC, BO ſunt *a* tres proportionales, erit F ad ſibi ſimilem R, *b* ut AB prima ad BO tertiam. Rurſum quoniam *c* BA, AC, AO, ſunt proportionales, erit F ad ſibi ſimilem, L, ut *d* BA prima ad AO tertiam. Quia igitur eſt F ad R, ut AB ad BO, & F ad L, ut AB ad AO, erit quoque F ad R & L ſimul ſumtas, ut *e* AB ad BO, AO ſimul ſumtas. Sed AB duabus BO, AO æqualis eſt. Ergo etiam F, duabus R & L æqualis erit. Quod erat demonſtrandum.

a *Per coroll. 2. p. 8. l. 6.*
b *Per 20. l. 6. & per def. 10. l. 5.*
c *Per corol. 2. p. 8. l. 6.*
d *Per 20. l. 2. & defin. 10. l. 6.*
e *Per 24. l. 5.*

Corollarium.

EX hac propoſitione facilè dabitur quotcunque figuris ſimilibus rectilineis quibuſcunque

buſcunque una omnibus æqualis & ſimilis, eâdem prorſus methodo, quâ probl. 1. ſcholii poſt 47. l. 1, exhibetur datis quotlibet quadratis unum æquale. In demonſtratione tantum pro 47. l. 1. citetur 31. l. 6.

PROPOSITIO XXXII.

Vix habet uſum, nec quidquam habet notabile.

PROPOSITIO XXXIII.

Fig. 48. *IN æqualibus circulis; vel eodem; anguli, ſive ad centra (ut A B C, F O D) ſive ad peripheriam (ut A R C, F S D) eam inter ſe rationem habent, quam arcus (A K C, F G D) quibus inſiſtunt. Idem intellige de ſectoribus.*

Quod attinet ad angulos centri & ſectores, demonſtrabitur eodem prorſus modo, quo prop. 1. hujus libri demonſtratum eſt triangula æquè alta eſſe ut baſes. Tantum ubi iſthic citatur prop. 38. l. 1. hic citetur 29 lib. 3.

Quoniam verò ad peripheriam anguli R a Per 20. l. 3. & S dimidii *a* ſunt angulorum ad centrum A B C, F O D, quod de his oſtenſum eſt, liquebit etiam de illis.

Carol-

Corollaria.

1. ANgulus cenrri (B A C) eſt ad quatuor rectos, ut arcus B C cui inſiſtit, ad totam circumferentiam. *Fig. 43.*

Nam ut B A C eſt ad rectum B AF, ita per hanc 33. arcus BC ad quadrantem BF. Ergo angulus B A C eſt ad 4. rectos ut arcus B C eſt ad 4. quadrantes, hoc eſt ad totam peripheriam.

2. Inæqualium circulorum arcus I L, B C, qui æquales ſubtendunt angulos, ſive ad centra ut I A L, & B A C, ſive ad peripheriam, ſunt ſimiles.

Nam arcus I L eſt ad ſuam peripheriam, *b* ut angulus I A L, hoc eſt ut B A C, ad 4. rectos; & arcus B C eſt ad ſuam peripheriam *c*, ut idem angulus B A C ad 4. rectos. Ergo I L eſt ad ſuam peripheriam, ut B C ad ſuam. Ergo *d* ſunt ſimiles arcus I L & B C.

b *Per coroll. 1.*
c *Per idem corol.*
d *Per defin. 4. l. 6.*

3. Duæ ſemidiametri (A B, A C) à concentricis peripheriis, arcus auferunt ſimiles I L. B C. Patet ex coroll. 2.

4. Segmenta (BKC, IOL) quæ angulos capiunt æquales (K, O,) ſimilia ſunt.

Nam per coroll. 2. arcus BC, I L, ac proinde etiam arcus BKC, IOL, ſimiles ſunt.

ELE-

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ

LIBER UNDECIMUS.

NOBIS SEPTIMUS.

Sex libris primis ſubjungit Euclides elementa numerorum tribus ſequentibus, ſeptimo, octavo & nono comprehenſa, quibus etiam decimum de quantitatibus incommenſurabilibus adjungit. Nos à planis immediatè tranſimus ad ſolida. De numeris ſeorſum tractaturi. Id, opinor, diſcentibus commodius erit, ſi elementa Geometriæ nullâ aliâ tractatione interrupta, ſimul omnia habeantur. Nihilominus cum citabimus propoſitiones hujus & ſequentis libri, eos non ſeptimum & octavum, ſed undecimum & duodecimum appellabimus, ne, ſi ab ordine Euclidæo ubique recepto diſcedamus, propoſitionum citatio implicatior reddatur.

Hic liber duas quodammodo partes complectitur. In prima jaciuntur fundamenta, quibus ſolidorum, hoc eſt corporum doctrina univerſa nititur. Altera parallelepipedorum affectiones proponuntur.

Digitized by Google

DEFINITIONES.

1. SOlidum, ſive corpus eſt, quod longitudinem, latitudinem & profunditatem habet.

2. Solidi extremum eſt ſuperficies.

3. Linea recta (AB) eſt ad planum (CC) recta ſive perpendicularis, cùm ad rectas omnes lineas (C A) in plano (C C) ductas, à quibus illa tangitur, angulos rectos facit (B A G, B A C. *Fig. 1. lib. 11. tabulâ. 5.*

4. Planum ad planum rectum ſive perpendiculare eſt, cum omnes rectæ lineæ (L Q,) quæ communi planorum ſectioni (X R) perpendiculares ducuntur in planorum uno, rectæ ſunt alteri plano (ABCO.) *Fig. 2.*

5, Si recta linea (OL) plano inſiſtat non ad rectos angulos, & à ſublimi ejus puncto (L) ad planum ducatur perpendicularis LP jungaturque P O; angulus L O P dicitur inclinatio lineæ O L ad planum. *Fig. 3.*

6. Si planum (R E) plano (L Q) non inſiſtat perpendiculariter, alterius ad alterum inclinatio eſt acutus angulus (ABC,) qui continetur à rectis lineis, (AB & B C) quæ in utroque plano ad communem ſectionem (O) E ducuntur perpendiculares. *Fig. 4.*

7. Planum ad planum ſimiliter inclinatum dicitur, atque alterum ad alterum quando

quando dicti inclinationum anguli ſunt æquales.

8. Parallela plana ſunt, quæ in omnem partem producta æqualibus ſemper intervallis diſtant.

9. Similes figuræ ſolidæ rectilineæ ſunt, quæ ſimilibus planis continentur, multitudine æqualibus.

Fig. 5. 10. Angulus ſolidus rectilineus eſt, qui pluribus, quàm duobus planis angulis (B A C, C A O, O A B) non in eodem exiſtentibus plano, ſed ad unum punctum conſtitutis, continetur.

11. Æquales ſolidi anguli ſunt, qui intra invicem poſiti congruunt.

Quemadmodum angulus planus eſt inclinatio linearum, ita ſolidus angulus eſt inclinatio ſuperficierum. De utroque igitur eodem modo ratiocinandum erit. Conſule ſcholium poſt prop. 16. l. 3.

Fig. 6. 7. 8. 12. Priſma eſt figura ſolida, planis comprehenſa, quorum adverſa duo (O F E, A C B) ſunt parallela, æqualia & ſimilia.

Fig. 8. 13. Parallelepipedum eſt ſolidum ſex quadrilateris, ex adverſo parallelis comprehenſum.

14. Si ſex plana ex adverſo parallela ſint quadrata, ſolidum iis comprehenſum, cubus erit.

PRO-

PROPOSITIO PRIMA.

Recta lineæ pars una (AC) nequit eſſe in ſubjecto plano (OE) altera (CB) extra planum. Fig. 9.

Per ſe clarum eſt ex definitione plani, & lineæ rectæ. vide defin. 5. & 4. l. 1.

PROPOSITIO II.

Omne triangulum in uno eſt plano. Et duæ rectæ ſe mutuo ſecantes in eodem plano ſunt. Fig. 10.

Prima pars per ſe clara eſt, cum triangulum nihil ſit aliud, quam plana ſuperficies tribus rectis comprehenſa. Ex quo etiam patet pars altera.

PROPOSITIO III.

Si duo plana (A B, C D) ſe mutuo ſecant; (E F) communis eorum ſectio eſt recta linea. Fig. 11.

Patet ex definitione plani. Licebit tamen ſic demonſtrare: ſi E F ſectio communis non eſt recta linea, ducatur in plano C D recta E O F, & in plano B A recta E Q F. duæ

duæ igitur rectæ E O F, E Q F claudent ſpacium. Quod eſt abſurdum.

PROPOSITIO VI.

Fig. 12.

SI recta (B A) duabus rectis (C A X, F A S) ſe mutuò ſecantibus, perpendicularis exiſtat, etiam plano per ipſas ducto perpendicularis erit.

Si negas, alia recta B Q plano rectarum A C, A F ſit perpendicularis. Junge A Q, & huic in plano F A C duc perpendicularem Q O. Hæc producta, neceſſario ſecabit *o* aliquam rectarum C A X, F A S vel utramque, ubicunque tandem fuerit punctum, Q. ſecet ergo C A X in O, jungaturque B O, Quoniam ergo angulus B A O per hyp. rectus eſt.

o *Colligitur ex ſchol. poſt.* 31. *l.* 1.

a *Per* 47. *l.* 1

erit quad. B O. Æ. *a* quad. B A, quad. A O.

fed quia B Q ponitur recta plano F A C, ac proinde *b* rectum facit cum A Q angulum B Q A, eſt.

b *Per defin.* 3. *l.* 11.

c *Per* 47. *l.* 1

quad. B A. *c* Æ. quad. B Q quad: A Q.

Et quia angulus A Q O per conſt. rectus eſt;

o *Per eand.*

quad. A O. Æ. *o* quad. O Q quad. A Q.

Ergo

Ergo quad. B O Æ. { quad. B Q
quad. O Q
quad. A Q bis. }

Ergo quad. B O majus eſt B Q & O Q, ac proinde *d* angulus B Q O rectus non eſt. Ergo B Q non eſt recta *e* plano C A F. Liquet ergo quæſitum.

d *Patet ex eadem.*
e *Patet ex defin 3. l. 11.*

Scholium.

Ex eo quod ponebatur B Q eſſe recta plano F A C; directè eſt demonſtratum B Q non eſſe rectam plano F A C: ac proinde ex eo quod negaretur aſſertio theorematis, eadem aſſertio directè probata eſt. Hæc demonſtratio quoad ſubſtantiam eſt Ioannis Ciermans.

PROPOSITIO V.

Si tres rectæ (B A, C A, F A) eidem rectæ (A R) ad idem punctum (A) ſint perpendiculares; tres illæ erunt in uno plano.

Fig. 13.

Sit enim, ſi fieri poteſt, earum una B A in alio plano R O, quod ſecet L Q planum duarum reliquarum C A, F A, rectâ A O. Quoniam R A per hyp. perpendiculariter inſiſtit duabus C A, F A, plano L Q recta *a* erit. Ergo cum A O rectum facit *b* angulum R A O. Sed etiam ex hyp. angulus R A B

a *Per prac.*
b *Per defin. 3. l. 11.*

 RAB

R A B rectus eſt. Ergo anguli, R A B & R A O æquales ſunt. Quod eſt abſurdum.

PROPOSITIO VI.

Fig. 14. *Lineæ rectæ (A B, CD) quæ eidem plano (E F) ſunt perpendiculares, inter ſe ſunt parallelæ.*

Poſtulari poterat ut per ſe notum; licebit tamen ſic demonſtrare.

Iunctâ B D, fac in plano F E; lineam D G normalem ad B D & parem B A, junganturque D A, G A, G B. Rectæ B D, D G a æquantur B D, a B A, & anguli B D G, b D B A ſunt recti. Ergo A D, B G c ſunt æquales. Igitur triangula A B G, G D A ſibi mutuo æquilatera ſunt, ac proinde anguli A B G, A D G æquales. Sed A B C e rectus eſt. Quare & A D G rectus. Sunt vero & B D G ex conſtr. & C D G definit. 3. recti. Ergo G D ad tres C D, A D, B D, recta eſt. Ergo C D cum A D, B D eſt in uno i plano, ſed etiam A B cum A D, BD o in uno plano eſt. Ergo A B, C D ſunt in uno plano. Ergo cum anguli A B D, C D B, ſint p recti, erunt A B, C D q parallelæ. Quod erat demonſtrandum.

a *Per conſtr.* b *Per defin. 3. l. 11.* c *Per 4. l. 1.* e *Per defin. 3. l. 11.* i *Per præc.* o *Per 2. l. 11.* p *Per defin. 3. l. 11.* q *Per 29. l. 1. & defin. 36. l. 1.*

PRO-

PROPOSITIO VII.

Recta (E F) ſecans rectas (AB, CD) poſitas in eodem plano, in uno eſt cum ipſis plano. *Fig. 13.*

Poſtnlari poterat. Qui volet ſic demonſtret.

Planum rectarum A B, C D ſecet aliud planum per puncta E, F, ſi jam E F non eſt in plano AB, C D, non erit E F communis ſectio. Sit ergo EGF. Ergo E G F *a* eſt linea recta. Duæ igitur rectæ E F, E G F concludunt ſpacium. Quod eſt abſurdum. a *Per 3. l. 11.*

Corollarium.

Hinc ſequitur ſi E F ſecat parallelas A B, C D, in eodem eſſe cum ipſis plano; omnes enim parallelæ *b* ſunt in uno plano. b *Per defin. 36. l. 1.*

PROPOSITIO VIII.

Si parallelarum (A B, C D) una (AB) plano (E F) ſit recta, etiam latera (C D) eidem plano erit recta. *Fig. 14.*

Poterat poſtulari. Si demonſtratio quæritur, ferè ſimilis ea eſt demonſtrationi propoſitionis 6.

PROPOSITIO IX.

Fig. 16. *Recta (A B, E F) quæ ſunt eidem recta (C D) parallelæ, licet non in eodem cum illa plano, etiam ſunt inter ſe parallelæ.*

Quamvis poſtulari poſſet, licebit tamen ſic demonſtrare.

In plano parallelarum A B, C D, duc GK normalem ad C D. Item in plano parallelarum EF, C D, duc H K normalem
a Per 4. l. 11. ad C D. Ergo *a* C K recta eſt plano GKH. Ergo cum A G, E H ſint parallelæ ad C K
b Per 8. l. 11. erunt A G, E H *b* rectæ plano G K H. Er-
c Per 6. l. 11. go A G, E H *c* ſunt parallelæ. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO X.

Fig. 17. *Si dua recta (A C, B C) ſint parallelæ duabus rectis D F, E F; licet non ſint in eodem plano, æquales angulos (C & F) comprehendunt.*

Fiant C A, C B æquales F D, F E, & ducantur D E, A B, D A, F C, E B. Cum A C, F D ſint parallelæ & æquales, etiam
a Per 33. l. 1. A D, C F *a* parallelæ ſunt & æquales. Similiter

liter oſtendam B E, C F eſſe parallelas & æquales. Ergo etiam A D, BE ſunt *b* parallelæ & *c* æquales. Æquantur *d* ergo A B, DE. Cum igitur triangula B A C, E D F ſibi mutuo ſint æquilatera, anguli C & F *e* æquales erunt. Quod erat demonſtrandum.

d *Per præc.*
c *Per axio. 1*
d *Per 33. l. 1.*
e *Per 8. l. 1.*

PROPOSITIO XI.

A*D planum datum (A B) à dato extra illud puncto (C) perpendicularem ducere.*

Fig. 18.

Conſtr. in plano A B, duc quamvis DF, ad quam ex C perpendicularem deſcribe CE. Ad eandem per E, in plano A B perpendicularem duc A E M. Tum ad A M ex C perpendicularem demitte C G. Dico C G plano A B rectam eſſe.

Per G ponatur H G parallela ad D F,

Per conſt. D E recta eſt ad C E, & E M. Ergo D E recta *a* eſt plano C E M; adeoque & *b* H G. Ergo *c* CG recta eſt ad HG. Sed & C G ex conſt. recta eſt ad E M. Ergo C G *d* recta eſt plano A B. Quod erat propoſitum.

a *Per 4. l. 11.*
b *8. l. 11.*
c *Per defin. 3. l. 11.*
d *Per 4. l. 11*

PROPOSITIO XII.

E*X dato plani (E F) puncto (A) rectam ad datum planum erigere.*

Fig. 19.

a Per prac. A quovis extra planum E F puncto D, fac DB ad planum *a* EF rectam. Junctaque B A, duc A C parallelam D B. Dico factum. Demonſtratio patet ex 8.

Scholium.

Practicè per datum punctum perpendicularis ducitur dato plano, ſi norma O K N ad datum punctum applicetur.

Fig. 20.

PROPOSITIO XIII.

Lineæ ex eodem puncto ductæ (D C, E C) nequeant ambæ ad idem planum (A B) eſſe rectæ.

Alias enim per 6. forent parallelæ. Quod fieri non poteſt.

Fig. 21.

PROPOSITIO XIV.

Si eadem recta (A B) ad duo plana (F G, L Q) perpendicularis eſt. plana erunt parallela.

Sumatur in planorum alterutro F G, quodvis punctum C, ex quo ducatur C E parallela ad A B, occurrens plano L Q in
a Per 8. l. 11. E. Erit C E etiam *a* recta plano utrique F G, L Q. Quare ſi jungantur rectæ A C,
b Per defin. 3. l. 11. B E, erunt anguli A, B *b* recti. Ergo A C,
c Per 29. l. 1. B E ſunt parallelæ. Ergo A C E B parallelogrammum eſt, ac proinde C E, quam

iam

iam oſtendi utrique plano eſſe perpendicularem; æquatur *d* A B. Eodem modo oſtendam omnes utrique plano perpendiculares eſſe æquales. Ergo plana *e* ſunt parallela. Quod erat demonſtrandum.

d *Per 34. l. 1.*

e *Per defin. 8. l. 11.*

PROPOSITIO XV.

SI rectæ duæ ſe mutuo tangentes (B A, C A) ad duas alias ſe mutuo tangentes (E D, F D) ſint parallelæ, etiam plana per ipſas ducta erunt parallela. *Fig. 22.*

Ex A ducatur A G recta ad planum E F, ponanturque G H, G I, parallelæ ad D E, D F. Erunt hæ *a* parallelæ etiam ad A B, A C. Cum igitur anguli I G A, H G A, ſint *b* recti, erunt etiam *c* C A G, B A G recti. Ergo G A, quæ ad planum E F eſt recta, etiam recta *d* eſt plano B C. Ergo plana *e* B C, E F ſunt parallela. Quod erat demonſtrandum.

a *Per 9. l. 11.*

b *Per defin. 3. l. 11.*

c *Per 27. l. 1.*

d *Per. 4. l. 11.*

e *Per prac.*

PROPOSITIO XVI.

PLanum (E H F G) ſecans parallela plana (A B, C D) in iis facit ſectiones (E H, G F) parallelas. *Fig. 23.*

Si non: cum ſint in eodem plano ſecante, convenient *o* alicubi in I. Quare cum

o *Per ſchol. poſt. 31. l. 1.*

a Per 1.l.11. totæ H E I, FG I ſint *a* in planis A B,CD, productis,etiam hæc convenient in I. Quod eſt abſurdum contra definitionem 8. hujus.

PROPOSITIO XVII.

Fig. 24. *Parallela plana rectas lineas (B D & H G) proportionaliter ſecant.*

Ducantur in planis PQ, TV rectæ B H D G, item B G occurrens plano R S in F, junganturque F C, F I. Planum trianguli B G D ſecans parallela plana, facit ſectiones C F, D G *a* parallelas. Ergo eſt B C ad C D, ut *b* B F ad F G. Rurſum triangulum B H G ſecans parallela plana facit, ſectiones *c* B H, FI parallelas. Ergo eſt HI ad I G, ut *d* B F ad F G; hoc eſt (quod jam oſtendi) ut B C ad C D. Quod erat demonſtrandum.

a Per prac.
b Per 2.l. 6.
c Per prac.
d Per 2.l. 6.

PROPOSITIO XVIII.

Fig. 25. *Si recta linea (F E) ſit ad planum (A B) recta, omnia, quæ per ipſam ducuntur plana, ſunt eidem plano (A B) recta.*

Ductum ſit per FE planũ aliquod G C faciens cum A B ſectionem C D. In hoc ducantur H K normales ad C D ſectionem com-

communem. Cum igitur etiam *o* F E, recta ſit ad C D; erunt K H *a* parallelæ ad F E. Sed F E ponitur recta plano A B. Ergo & H K rectæ *b* ſunt plano A D. Ergo G C planum *c* plano A B rectum eſt.

o *Per hyp. & defin. 3. l. 11.*
a *Per 29. l. 1.*
b *Per 8. l. 11.*
c *Per defin. 4. l. 11.*

PROPOSITIO XIX.

SI duo plana (M F, G D) ſe ſecantia, ſint ambo recta eidem plano (A B:) erit etiam communis illorum ſectio (K L) recta plano (A B.) *Fig. 26.*

Quoniam planum M F ponitur rectum plano A B; ex def. 4. patet ex puncto L poſſe in plano M F duci rectam perpendicularem plano A B, eam nempè quæ ex L eſſet in plano M F perpendicularis ad communem ſectionem E F. Similiter, quia planum G D ponitur perpendiculare ad A B, ex def. 4. patet in plano G D poſſe duci ex puncto L perpendicularem plano A B. Sed ex puncto L tantum *a* una poteſt duci perpendicularis plano A B. Ergo neceſſe eſt, ut recta quæ ex L perpendicularis eſt plano A B, exiſtat in utroque plano M F & G D, ac proinde ſit ipſa planorum M F & G D communis ſectio L K. Quod erat demonſtrandum.

a *Per 13. l. 11.*

PRO-

PROPOSITIO XX.

Fig. 27. *SI angulus ſolidus (A) tribus planis angulis (B A C, C A D, D A B) continetur, horum duo quilibet reliquo ſunt majores.*

Si tres plani ſunt æquales, patet aſſertio, ſi inæquales, maximus eſto BAD. Hic nihilominus minor eſt duobus reliquis. Ex maximo enim B A D abſcinde B A E parem BAC, fiantque æquales AC, AE. Per E ducatur recta occurrens ipſis A B, AD in B & D; junganturque BC, DC. Quoniam
o Per conſt. anguli *o* B A E, B A C æquales ſunt, & latera B A, AE, æqualia lateribus B A, A C, et-
a Per 4. l. 1. jam baſes B E, B C, æquales *a* erunt. Quo-
o Per 20. l. 1. niam verò B C, C D *o* majores ſunt quam B D, ablatis æqualibus BE, B C, remanet C D major quam ED. Sed latera EA, AD,
b Per conſtr. æquantur lateribus *b* C A, A D. Ergo an-
c Per 25. l. 1. gulus *c* CAD major eſt quam E A D. Cum igitur B A C par ſit oſtenſus B A E. Erunt duo ſimul B A C, C A D majores toto B A D. Quod erat demonſtrandum.

PRO-

PROPOSITIO XXI.

Fig. 28.

PLani anguli, ſolidum angulum quemcumque componentes, quatuor rectis ſunt minores.

Eſto ſolidus angulus A, planis angulis illum componentibus ſubtendantur rectæ B C, C D, D E, EF, F B, in uno plano exiſtentes. Quo facto conſtituitur pyramis, cujus baſis eſt polygonum B C D E F, vertex A, totque cincta triangulis G, H, I, K, L, quot plani anguli componunt ſolidum A. Iam vero quia duo anguli A B F, A B C *a* majores ſunt uno F B C, & duo A C B, A C D majores uno BCD & ſic deinceps, erunt triangulorum G, H, I, K, L, circa baſim anguli ſimul ſumti omnibus ſimul angulis baſeos B, C, D, E, F majores. Sed anguli baſeos una cum quatuor rectis faciunt bis tot rectos, *b* quot ſunt latera, ſive quot triangula. Ergo omnes triangulorum circa baſim anguli, una cum quatuor rectis conficiunt amplius quam bis tot rectos, quot ſunt triangula. Sed iidem anguli circa baſim, una cum angulis qui componunt ſolidum, componunt bis *c* tot rectos quot ſunt triangula. Liquet ergo angulos ſolidum angulum A componentes quatuor rectis eſſe minores, Quod erat demonſtrandum.

a *Per præc.*

b *Per theor. 2. ſchol. poſt 32. l. 1.*

c *Patet ex 32. l. 1.*

Corol-

Corollarium.

EX hac & præcedenti ſatis colligitur ex tribus angulis planis, rectis quatuor minoribus, quorum duo quilibet reliquo ſint majores, ſolidum angulum conſtitui poſſe.

Scholium.

EX hac eâdem propoſitione demonſtratur celebre theorema tres tantùm figuræ planæ ordinatæ, & æquales, corpus continere poſſunt, nimirum æquilatera triangula vel 4. *vel* 8. *vel* 20. *Quadrata* 6. *pentagona* 12. *Ac proinde quinque tantum ſunt ordinata, ſeu regularia corpora. Pyramis, quæ* 4. *Tetraëdrum quod* 8. *Icoſaëdrum quod* 20. *æquilateris triangulis continetur; Cubus, qui* 6. *quadratis, Dodecaëdrum quod* 12. *æqualibus pentagonis ordinatis comprehenditur. Porro corpus ordinatum dicetur, quod planis ordinatis & æqualibus continetur.*

Demonſt. Ex duobus æquilateris triangulis non poteſt conſtitui angulus ſolidus, ad hoc enim ſaltem requiruntur tres.

A tribus triangulis æquilateris in unum punctum coeuntibus, poteſt conſtitui angulus ſolidus pyramidis; ex quatuor, angulus ſolidus octaëdri; ex quinque angulus ſolidus Icoſaëdri, cum æquilateri trianguli anguli tum 3. *tum* 4. *tum* 5.

ſint 4.

ſint 4. *rectis minores, ut colligitur ex coroll.* 12. *p.* 32. *l.* 1.

Quoniam vero tres anguli pentagonici b *ſunt* 4 *rectis minores, poterunt tria pentagona in unum punctum coeuntia conſtituere ſolidum angulum nempè Dodecaëdri.* b *Colligitur, ex corol. p.* 11. *l.* 4.

A tribus quadratis in unum punctum coëuntibus effici ſolidum angulum cubi, per ſe patet. Atque ita quinque exſurgunt regularia corpora.

Præter hæc nulla eſſe alia ſic oſtenditur.

Sex anguli trianguli æquilateri conficiunt 4. *rectos, unus enim facit duas* o *tertias recti: ac proinde ſex tales efficient* 12. *tertias recti, hoc eſt rectos* 4. *Ergo, à ſex æquilateris triangulis non poterit effici ſolidus angulus, multò minùs à pluribus.* o *Per corol.* 12. *p.* 32. *l.* 1.

A quatuor quadratis, non poſſe conſtitui ſolidum angulum, ac multò minus à pluribus per ſe patet.

Anguli pentagonici 4. *ſunt* 4. *rectis majores, ſinguli enim efficiunt* 6. *quintas* e *recti. Ergo à quatuor pentagonis nequit fieri angulus ſolidus, multò minus à pluribus.* e *Per corol. p.* 11. *l.* 4.

Nec ſanè ex aliis figuris quibuſlibet ordinatis conſtitui poterit ſolidus angulus. Tres anguli hexagonici f *ſunt* 4. *rectis æquales, unus enim facit* 4. *tertias recti, ac proinde tres faciunt* 12. *tertias recti, hoc eſt* 4. *rectos. Ergo ex tribus hexagonis nequit conſtitui ſolidus angulus, multò minus à pluribus.* f *Per corol.* 2. *p.* 15 *l.* 4

Cum vero tres. anguli hexagonici ſint 4. *rectis æquales, tres anguli figurarum quarumlibet hexagono majorum, ut ſeptagoni, octagoni, &c.* 4. *rectis majores erunt. Quare manifeſtum eſt reliquas figuras ordinatas, omnes eſſe ineptas ut ſolidum angu-*

lum

lum conſtituant, adeoque præter iam dicta 5. nulla ordinata corpora dari poſſe.

PROPOSITIO XXII. XXIII.

ADmodum prolixæ ſunt ac moleſtæ tyronibus, & ferè uſu non veniunt.

PROPOSITIO XXIV.

Fig. 29. *PLana parallelepipedum continentia (1.) ſunt parallelogramma. (2.) quæ ex adverſo, ſunt ſimilia & (3.) æqualia.*

1. Pars. Planum A F ſecans plana B D, FH ex defin. 13. parallela facit *a* ſectiones BA, F E parallelas. Rurſum planum A F ſecans plana A H, B G per defin. 13. parallela, facit *b* ſectiones A E B F parallelas. Ergo B E F A parallelogrammum eſt. Simili argumento reliqua parallelepipedi plana ſunt parallelogramma.

a Per 16. l. 11.

b Per eand.

2. Pars. Quoniam ex prima parte patet A B, B C parallelas eſſe E F, F G, erunt *c* anguli A B C, E F G pares. Quarè cum & latera alternis ſint paria, ſimilia ſunt parallelogramma adverſa B D, F H. Eodem modo probatur de cæteris oppoſitis.

c Per 10. l. 11.

3. Pars patet ex prima parte, & 4. vel 8. 1.

PRO-

PROPOSITIO XXV.

SI parallelepipedum (G F D I) aut quodvis priſma plano (N P) ſecetur adverſis planis parallelo; erit ut baſis (D C P O) ad baſim (O P F E) ita ſolidum (G P) ad ſolidum (N F.) Fig. 30.

Demonſtrabitur eodem modo, quo 1.6.

Corollarium.

Priſma ſectum plano adverſis planis parallelo, ſectionem habet ſimilem & æqualem planis adverſis.

PROPOSIT. XXVI. XXVII.

NOn ſunt neceſſariæ.

PROPOSITIO XXVIII.

PLanum per adverſorum planorum diametros (A C, E G) tranſiens, parallelepipedum ſecat in duo æqualia priſmata. Fig. 29.

Quoniam *a* B G, B E ſunt parallelogramma; CG, A E æquidiſtant eidem B F. Ergo & *b* inter ſe ſunt parallelæ, ac proinde in uno ſunt plano. Ergo rectæ A C, E G a Per 24. l. 11. b Per 9. l. 11

c in

c Per 7. l. 11. *c* in uno ſunt plano: Iam verò planum per illas ductum ſecare paralelepipedum in duo priſmata æqualia. Sic oſtendo. Intelligatur priſma A E G C D H ſupra planum ſuum E A C G ita conſtitui, ut anguli D, H vergant ad angulos B, F. Manifeſtum eſt tum adhuc fore inter parallela plana B A D C, F H G. Tum verò neceſſe eſt, ut D cadat in B, & H in F, Cadat enim D extra B, ſi fieri poteſt, in N. Angulus B A C
d Per 27. l. 1. æquatur *d* angulo D C A. Sed D C A æquatur N A C (eſt enim unus idemque angulus.) Ergo B A C & N A C æquales ſunt: quod eſt abſurdum. Ergo D incidit in B, &
e Per ax. 7. pari de cauſa H *e* in F. Ergo priſma A E G C D H congruit priſmati A C G E F B ac proinde *e* æqualia ſunt.

PROPOSIT. XXIX. & XXX.

Fig. 31. *Arallelepipeda (FEAGKIMC & FEBHLOMI) quæ eandem habent baſim (EFIM) & altitudinem eandem, ac proinde exiſtunt inter parallela plana (EFIM, GAOL) æqualia ſunt.*

Vel enim exiſtunt inter lateralia parallela plana E A O M, & F G L I, vel non. Eſto primũ. Ex 24. hujus, & 8. l. 1. patet triangula A E B; C M O, itẽm G F H, K I L ſibi mutuò

mutuò æquilatera & æquiangula eſſe. Quare ut in præcedenti, oſtendam priſmata CM OLIK, AEBHFG ſibi mutuo impoſita congruere, ac proinde a æqualia eſſe, Quare addito communi ſolido FE BHK C. MI, tota parallelepipeda FEAGKI MC, FEBHLOMI æqualia erunt. Quod erat dem. a Per axio. 7.

Sit deinde parallelepipedum FXQE MIPR non inter eadem lateralia plana parallela exiſtens cum parallelepipedo FE AGKCMI. Quoniam ex hypotheſi GK, AC, RP, QX ſunt in uno plano ad baſim EFIM parallelo, RP, QX ſecent GK in L & H; AC veró in O & B, junganturque EB, MO, FH, IL; facilè oſtenſu eſt plana ſolidum FEBHLOMI continentia parallelogramma eſſe ex adverſo æquidiſtantia, adeoque ſolidum illud c eſſe parallelepipedum. Sed huic per primam partem parallelepipeda FXQEMIPR, & FEAGKCMI, ſunt æqualia. Ergo etiam ſunt æqualia interſe. Quod erat dem. Fig. 32. c Per defin. 13. l. 11.

Scholium.

Hæc propoſitio ſimilis eſt propoſitioni 35. lib. 1. affirmat enim de ſolidis, quod illa de planis. Quare ſimilis etiam erit reliquorum caſuum demonſtratio.

PROPOSITIO XXXI.

Fig. 33. *Parallelepipeda ſuper æqualibus baſibus (A O & E G) & in eadem altitudine (S) ſunt æqualia.*

Habeant parallelepipeda primò latera ad baſes normalia. Ad latus F G productum fiat parallelogrammum G M K H æquale ac ſimile parallelogrammo A O, perfectoque parallelogrammo G M P R, rectæ P M, R G occurrant ipſi K H in Q & L. Iam verò intelligantur ſuper G K, G Q, G P, conſtitui parallelepipeda, quorum latera ſint ad baſes recta, altitudo autem, omnium communis ſit. S. ſolidum E G S eſt ad ſolidum G P S, ut E G *b* ad G P; hoc eſt (quia E G, A O per hyp. æquantur) ut A O ad G P; hoc eſt per conſtr. ut G K ad G P; hoc eſt ut *c* G Q ad G P; hoc eſt *d* ut ſolidum G Q S eſt ad idem ſolidum G P S. Quoniam igitur ſolida E G S & G Q S eandem habent rationem ad ſolidum G P S, erit ſolidum E G S *o* æquale G Q S; hoc eſt ſolido *e* G K S; hoc eſt (quia baſes, G K, A O ſunt *f* æquales & ſimiles) ſolido *i* A O S. Quod erat propoſitum. *Per totum diſcurſum ſolida accipiuntur recta.*

b Per 25. l. 11.
c Per 35. l. 1.
d Per 25. l. 11.
o Per 9. l. 5.
e Per 29. l. 11.
f Per conſtr.
i Patet ex 29. l. 11 imò per ſe.

Habeant deinde parallelepipeda data E G S,

EGS, AOS latera ad baſes EG & AO obliqua. Fiant ſuper EG, AO parallelepipeda, quorum latera ſint ad baſes recta in altitudine S, hæc æqualia erunt obliquis per 29. aut 30. Quare cum parallelepipeda recta per primam partem ſint paria inter ſe, erunt & obliqua æqualia. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXXII.

Parallelepipeda quævis æquè alta, ſunt inter ſe ut baſes. Fig. 34.

Baſes ſint G O, & A ſuper C O fac parallelogrammum O E par ipſi A.

Super B C, O E intelligantur erigi parallelepipeda in altitudine K: hæc igitur partes erunt unius parallelepipedi B E K. Ergo *a* parallelepipedum O E K eſt ad parallelepipedum B C K, ut baſis O E ad baſim B C; hoc *b* eſt ut baſis A ad baſim B C. Sed quia baſes O E & A ſunt æquales, parallelepipeda O E K & A K *c* æqualia ſunt. Ergo etiam parallelepipedum A K eſt ad parallelepipedum B C K, ut baſis A ad baſim B C. Quod erat demonſtrandum.

a *Per 25. h. 11.*
b *Per conſtr.*
c *Per prær.*

Scholium.

QVod hic de parallelepipedis oſtenſum eſt, demonſtrabitur in libro 12. de pyramidibus prop. 6. de quibuſlibet priſmatibus in corollario 1, poſt p. 9. de conis & cylindris prop. 12.

PROPOSITIO XXXIII.

Fig. 35.

SImilia parallelepipeda (H A & C M) ſunt in triplicatâ ratione laterum homologorum (A B, B C.)

Sint parallelepipeda A H, C M ſimilia. Ergo omnia ipſorum plana ſimilia *a* ſunt; adeoque A B ad B C *b* eſt ut E B ad BO; & ut F B ad B G, ſic E B ad BO. Inſuper & anguli *c* planorum æquales ſunt. Collocentur ſic igitur ſolida A H, C M ut æquales anguli CBO, ABE ſint oppoſiti, & latera AB, CB indirectum; tum verò etiam *d* E B, O B indirectumerunt. Cogitentur jam ſuper planis B Q & EC facta ſolida, ſic ut ſolida K B, HA, ſint unum parallelepipedum, & K B, PO faciant unum ſimiliter parallelepipedum, & PO, C M unum quoque parallelepipedum conficiant. Solidum H A *e* eſt ad ſolidum K B, ut A E ad B R; hoc eſt ut *f* AB ad BC; hoc eſt (ut per hyp. oſtendi ſupra) ut E B ad B O; hoc eſt ut *g* EC ad BQ; hoc eſt ut ſolidum *i* idem KB

a *Per defin. 9. l. 11.*
b *Per defin. 1 l. 6.*
c *Per eand.*
d *Patet ex 13 l. 1.*
e *Per 25. l. 11*
f *Per 1. l. 6.*
g *Per eand.*
i *Per 25. l. 11*

ad

ad ſolidum P O. Continuant ergo eandem rationem tria ſolida H A, K B, P O. Jam verò ſolidum K B eſt ad ſolidum P O, ut *k* baſis B R ad baſim B Q; hoc eſt ut *l* E B ad B O; hoc eſt ut *m* F B ad B G, hoc eſt, *n* ut planum F C ad planum B S; hoc eſt, ut idem *o* rurſus ſolidum P O ad C M ſolidum. Quatuor ergo ſolida H A, K B, P O, C M, ſunt continuè proportionalia. Ergo ratio primi H A ad quartum C M eſt *p* triplicata rationis primi H A ad K B ſecundum; hoc eſt rationis *q* A E ad B R; hoc eſt *r* rationis homologorum laterum A B ad B C. Quod erat demonſtrandum.

k *Per eand.*
l *Per* 1. *l.* 6.
m *Oſtendi ſupra ex hyp.*
n *Per* 1. *l.* 6.
o *Per* 25. *l.* 11.
p *Per defin.* 10. *l.* 5.
q *Per* 25. *l.* 11.
r *Per* 1. *l.* 6.

Scholium.

QUod hic de parallelepipedis oſtenſum eſt, in libro 12. *demonſtrabitur de pyramidibus propoſ.* 8. *de quibuſlibet priſmatibus, coroll.* 2. *poſt p.* 9. *de conis & cylindris p.* 12. *de ſphæris p.* 18.

PROPOSITIO XXXIV.

SI parallelepipeda æqualia ſunt (*B M, C K,*) *reciprocant baſes & altitudines* (*hoc eſt, baſis A M eſt ad baſim* F K, *ut reciprocè altitudo F C ad altitudinem A B.*) *Fig.* 36.

Et ſi reciprocant baſes & altitudines, æqualia ſunt.

 1. Pars

1. Pars. Sint primo latera ad baſes recta. Si jam ſolidorum B M, C K altitudines ſint pares, res patet.

Si altitudines ſint inæquales, à majori F C abſcinde F E parem B A: & per E duc planum E L ad F K parallelum. Baſis A M eſt
b Per 32. l. 11. ad baſim F K, ut ſolidum *b* B M ad ſolidum E K; hoc eſt (quod ex hyp. paria ſint ſolida BM, CK) ut ſolidum C K ad E K. So-
c Per 25. l. 11. lidum; hoc eſt ut *c* C G ad E G; hoc eſt ut
d Per 1. l. 6. *d* C F ad E F; hoc eſt ex conſtr. ut C F reciprocè ad B A. Quod erat demonſt.

Sint deinde latera ad baſes, obliqua. Erigantur ſuper iiſdem baſibus in altitudine eadem parallelepipeda recta. Erunt his ob-
e Per 29. & 30. l. 11. liquae parallelepipeda æqualia. Quare cum hæc per 1. partem reciprocent baſes & altitudines, etiam illa reciprocabunt. Quod erat demonſtrandum.

2. Pars. ſint altitudines inæquales, lateraque ad baſes recta, & ex majori C F ipſi
f Per 32. l. 11 B A ſume parem E F. Solidum B M eſt ad ſolidum E K, ut *f* A M ad F K: hoc eſt ex
g Per 1. l6. hyp. ut C F; ad BA; hoc eſt ex conſtr. ut
i Per 25. l. 11. C F ad E F; hoc eſt ut *g* C G ad E G; hoc eſt ut ſolidum *i* C K ad ſolidum idem E K. Ergo ſolida B M & C K eandem habent rationem ad E K. Ergo ſunt paria. Quod erat demonſtrandum.

Corol.

Corollaria.

QUæ de parallelepipedis demonſtrata ſunt Prop. 29.30.31.32.33.34.etiam conveniunt priſmatis triangularibus, quæ ſunt dimidia parallelepipeda, ut patet ex p. 28. Igitur.

1. Priſmata triangularia æquè alta ſunt ut baſes A, B. *Fig.* 37.

2. Si ſimilia fuerint, eorum proportio triplicata eſt proportionis laterum æqualibus angulis oppoſitorum.

3. Si æqualia ſunt, reciprocant baſes & altitudines: & ſi reciprocant baſes & altitudines, æqualia ſunt.

Scholium.

Quod hic propoſ.34. oſtenſum eſt de parallelepipedis, demonſtrabitur in libro 12 de pyramidibus p.9. de priſmatis quibuſcunque coroll. 3. poſt.p.9. de conis & cylindris. p. 15

PROPOSITIO XXXV.

VAldè prolixa, ſervit ſequenti, quam ſine illa demonſtrabimus.

PROPOSITIO XXXVI.

PArallelepipedum (DH) ex tribus rectis proportionalibus (A, B, C) factum *Fig.* 38.

æquatur parallelepipedo (I N) facto à media (B) & æquiangulo priori.

Parallelepipedi D H, baſis F D, habeat latus E F æquale A, & latus alterum E D æquale C: latus verò F G baſi inſiſtens, æquale mediæ, B. Erit parallelepipedum D H factum ex tribus rectis A, B, C. Parallelepipedi deinde, I N, tria latera L X, I X, X M (ac proinde omnia reliqua) ſint æqualia mediæ B; & angulus ſolidus X ſit æqualis angulo ſolido E. Erit parallelepipedum I N factum ex media B, & priori æquiangulum. Dico etiam eſſe æquale.

Cum enim per hyp. & conſtr. ſit ut F E ad L X, ita reciprocè I X ad D E, erunt
a Per 14.l.6 *a* baſes D F, I L æquales. Iam quia anguli ſolidi ad E & X ſunt æquales, ſi ponantur
b Per defin. 11.l.11. intra invicem, *b* congruent, & ob æqualitatem rectarum E G, X M, puncta M, G, coincident. Quare una erit utriuſque ſolidi altitudo, perpendicularis nempè a punctis M, G, jam congruentibus, in planum baſeos
c Per 31.l.11 demiſſa. Solida *c* igitur D H, I N, æqualia ſunt. Quod erat demonſtrandum.

Scholium.

HIc porro obſervabimus, id quod magnum habet uſum, ex tribus lineis quomodocunque inter ſe ductis, ejuſdem magnitudinis ſolidum gigni.

A B C,

ABC. CAB. BCA.

I. 2 3

In ſcemate hic appoſito duæ primæ literæ deſignant baſim; tertia altitudinem. Comparemus primum cum ſecundo.

Baſis A B eſt ad baſim C A per 2.6. ut B latus ad C latus; hoc eſt reciproce ut B altitudo ad C altitudinem. Ergo per 34.

A B C. æ. C A B.

Eodem modo oſtendes primum tertio, & tertium ſecundo eſſe æqua lia.

PROPOSITIO XXXVII.

P*Arallelepipeda ſimilia ſimiliterque à lineis proportionalibus deſcripta, etiam ipſa ſunt proportionalia: & è converſo.*

Patet ex 34.15.. Rationes enim parallelepipedorum per 33, hujus erunt duplicatæ rationum ex hyp. æqualium, quas habent lineæ,

Converſa patet ex 35.l. 5.

Propoſitio vera eſt de quibuſcunque ſimilibus corporibus, quæ patebit l.12. duplicatam habere laterum rationem.

PRO-

PROPOS. XXXVIII. & XXXIX.

NIhil continent memorabile, & vix ullius ſunt uſus.

PROPOSITIO XL.

Fig. 39. & 40. *SI fuerint duo priſmata triangularia æqualis altitudinis (A B F G O C & I K L P X Q) quorum unum baſim habeat parallelogrammam (O B) duplam baſeos alterius (I K L) quæ triangula ſit; priſmata erunt æqualia.*

Nam ſi perficiantur parallelepipeda KR & CH, erunt hæc æqualia *a* ob baſium CA, M K & altitudinum æqualitatem. Ergo etiam priſmata ipſorum *b* dimidia æqualia erunt. Quod erat demonſtrandum.

a Per 31. l. 11.
b Per 28. l. 11.

Scholium.

EX hactenus demonſtratis habetur dimenſio priſmatum triangularium, & quandrangularium, ſeu parallelepipedorum, ſi nimirum altitudo ducatur in baſim, ut ſi altitudo ſit 10. *pedum, baſis verò pedum quadratorum* 100, (*menſurabitur autem baſis per ſchol. p.* 36. *vel* 41. *l.* 1.) *multiplica* 10. *per* 100. *proveniunt* 1000. *pedes cubici pro ſoliditate priſmatis dati.*

De-

Demonſtratio facilis eſt. Nam quemadmodum rectangulum, ita & parallelepipedum rectum producitur ex altitudine ducta in baſim. Ergo etiam quodvis parallelepipedum producitur ex altitudine in baſim ducta, cùm E per 31. æquale ſit parallelepipedo recta ſuper eadem baſi ad eandem altitudinem conſtituto.

Deinde cum totum parallelepipedum producatur ex altitudine in totam baſim; ſemiſſis parallelepipedi (hoc eſt priſma triangulare per 28.) producetur ex altitudine ducta in dimidiam baſim; triangulum nempè I L K.

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ

LIBER DUODECIMUS,

NOBIS OCTAVUS.

QUod in libris præcedentibus hactenus præſtare conati ſumus, ut Mathematum elementa ad faciliorem ac breviorem methodum revocaremus; id imprimis præſtandum erit in hoc libro duodecimo, cujus doctrina cum maximè ſit neceſſaria, demonſtrationes adeò ſunt prolixæ, ut tyrones in deſperationem plerumque conjiciant. Huic incommodo ita mederi propoſitum nobis eſt; ut tamen à rigore Geometricæ demonſtrationis non recedamus. Quod utrum ſimus aſſecuti, lector intelliget ſi hæc noſtra cum Euclidæâ prolixitate contulerit.

DEFINITIONES.

Fig 1. lib. 12 tabulâ 5.

1. PYramis eſt ſolidum (Z L) triangulis (A L C, C L F, F L B, B L A) comprehenſum ab uno plano (Z) ad unum punctum (L) conſtitutis.

Planum Z baſis dicitur, & eſſe poteſt vel triangulum, vel quadrangulum, vel quævis

alia

alia figura; ex cujus lateribus ſingulis triangula ſurgunt in unum punctum L, quod vertex dicitur, coëuntibus.

Vt triangulum inter rectilineas figuras planas, ita pyramis inter ſolidas prima & ſimpliciſſima eſt.

2. Si extra planum alicujus circuli (CL) acceptum fuerit punctum (A) adeoque ducatur recta infinita (AF) tangens circulum in C; quæ puncto (A) manente fixo, circa peripheriam circuli convertatur, donec in eum locum (A C F) redeat, unde moveri cœperat; ſuperficies à recta linea (ACF) deſcripta, dicitur conica ſuperficies, corpus verò quod hac ſuperficie & circulo (CL) continetur, conus vocatur. *Fig. 23.*

Vertex coni eſt A.

Baſis coni eſt circulus C L.

Axis coni eſt recta (AB) ex vertice ad baſeos centrum ducta.

Latus coni eſt recta (AC) à vertice ad baſeos circumferentiam ducta, quam eſſe totam in coni ſuperficie, ex ejus geneſi eſt manifeſtum. *a Fig. 2.*

b Fig. 3.

Conus *a* rectus eſt, cum axis (AB) eſt baſi rectus.

Conus *b* ſcalenus, ſeu obliquus eſt, cùm axis (A B) non eſt ad baſim rectus.

Fit etiam conus rectus à triangulo rectangulo (CBA) circa unum latus perpendiculare (AB) in orbem ducto vide Fig. 2.

3. Si

Fig. 4. 5. 3. Si circa duos circulos æquales & parallelos (C L, O Q) recta linea infinita (C O F) convertatur, donec in locum redeat, unde moveri cœpit, ſic ut mota ſibi ipſi ſemper, parallela maneat; ſuperficies à recta (C O F) deſcripta dicitur cylindrica ſuperficies: corpus verò quod hac ſuperficie & binis circulis continetur, cylindrus vocatur.

Baſes cylindri ſunt circuli (CL, OQ.)

Axis cylindri eſt recta (A B) baſium centra conv ectens.

Latus cylindri eſt recta (O C) in cylindri ſuperficie utramque baſim tangens.

Fig. 4. Rectus cylindrus eſt cum axis ad baſes rectus eſt.

Fig. 5. Scalenus cylindrus dicitur, cum axis ad baſes non eſt rectus.

Fit etiam cylindrus rectus à rectangulo (OC B A) circa unum latus (B A) in orbem ductω: vide Fig. 4.

Fig. 20. & 21. 4. Similes coni & cylindri ſunt, quorum axes (A C, Z O) & baſium diametri (B F, Q R) ſunt proportionales.

5. Sphæra eſt ſolidum comprehenſum unâ ſuperficie, ad quam omnes rectæ lineæ à quodam puncto intra ipſam poſito ductæ, ſunt æquales.

Punctum illud centrum dicitur.

Sphæræ diameter eſt recta per centrum

trum ducta ad ſuperficiem utrimque pertingens.

Generatur ſphæra ſi ſemicirculus circa diametrum (AF) immotam convertatur. Fig. 6.

6. Magnitudines figuræ alicuiinſcriptæ, aut circumſcriptæ, ſiue figurâ minores vel majores, in figuram deſinere dicuntur, cum ab ea tandem differre poſſunt quantitate minori quâcunque datâ, ſeu quantumvis parvâ.

Itaque ſi ea, quæ figuræ alicui inſcribuntur, ab eâ tandem deficiant defectu minori quocunque dato in ſcripta dicentur in figuram deſinere: Et ſi ea quæ alicui fiuræ circumſcribuntur, excedant eam tandem exceſſu minori quocunque dato, dicentur ſurſum circumſcripta deſinere in figuram.

PROPOSITIO PRIMA.

Fig. 6. & 7.

P*Olygonorum ſimilium circulo inſcriptorum proportio eſt duplicata proportionis diametrorum (A F, I C.)*

Ducantur *a* A O, B E; I R, L C. Quia polygona ponuntur ſimilia, æquales erunt anguli O B A, R L I, & latera O B, B A proportionalia lateribus R L, L I. Ergo in triangulis O A B, R I L, *b* anguli O & R æquantur. Ergo etiam B F A & L C I, qui, iiſdem arcubus B A, L I, inſiſtunt, ſunt

a Per defin. 1. l. 6.

b Per 6. l. 6.

c æqua-

c Per 21. l. 3. b Per 31. l. 3. e Per coroll. 9. p. 32 l. 1. f Per 4. l. 6. c æquales. Anguli vero F B A, C L I in ſemicirculis ſunt d recti, ac proinde æquales. Ergo reliqui B A F, L I C e æquantur. Quoniam igitur triangula F A B, C I L, ſibi mutuo æquiangula ſunt, erunt f ſimilia, eritque B A ad L I, ut A F ad I C. Iam quia per hyp. polygona ſunt ſimilia, erit proportio

i Per 20. l. 6 eorum duplicata i proportionis laterum B A, L I; hoc eſt ut jam oſtendi duplicata proportionis diametrorum A F, I C. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

Fig. 6. & 7. POlygonorum ſimilium circulo inſcriptorum ãbitus ſunt inter ſe, ut diametri. Cum oſtenſum jam ſit A B eſſe ad L I, ut A F ad I C, etiam O B, erit ad R L, ut A F ad I C & ſic de cæteris lateribus. Ergo per 12. 5. omnia ſimul latera, ad ſimul omnia, hoc eſt ambitus ad ambitum ſunt ut A F ad I C.

Lemma.

Fig. 8. POlygona circulo inſcripta in circulum deſinunt.

Inſcribe quadratum A C B D. Cum a Per ſchol. poſt. 6. & 7. l. 4. hoc dimidium ſit quadrati a circulo conſcripti, erit majus dimidio circuli. Quare ſi hoc auferatur è circulo, auferetur plus quã dimidium. Deinde ſingulis arcubus biſectis in

in E, K, I, H, inſcribe octogonum: & in E tangat F G, cui B C, D A occurrant in G & F: erit CF parallelogrammum, cuius cum dimidium ſit triangulum *b* C E A, erit hoc plus quam dimidium ſegmenti C E A. Eodem modo ſingula triangula A K D, D I B &c. ſingulorum ſegmentorum plus ſunt quam dimidia. Ergo omnia triangula omnium ſegmentorum plus quam dimidia ſunt. Hæc ergo ſi ex illis, hoc eſt ex reſiduo circuli auferas, plus quam dimidium auferetur. Pari argumento ſi inſcribantur circulo polygona duplo ſemper plurium laterum oſtendam è reſiduo circuli ſemper auferri plus quam dimidium. Ergo reſiduum erit tandem *c* minus quocunque dato, ac proinde polygona inſcripta tandem à circulo deficient quantitate minori, datâ quâcunque, hoc eſt in circulum *o* deſinent. Quod erat demonſtr.

b *Per 41. l. 1*

c *Patet ex lem. 2. Schol. poſt 11. l. 6.*

o *Per deſin.*

PROPOSITIO II.

Circulorum proportio eſt duplicata proportionis diametrorum.

Fig. 6. & 7.

Polygonorum ſimilium circulo ſine fine inſcriptorum proportio ſemper duplicata *a* eſt proportionis diametrorum. Atqui polygona circulo in infinitum inſcripta, in circulum *b* deſinunt. Ergo per poriſma uniuerſale ſequens, etiam circulorum proportio,

a *Per 1. l. 12.*

b *Per lem.*

duplicata eſt proportionis diametrorum. Quod erat demonſtrandum.

Poriſma univerſale.

SI ea quæ duabus figuris (A, B) inſcribuntur, in ipſas deſinant, quam proportionem inter ſe ſemper habent inſcripta, eandem habent & figuræ.

R
A B X Z.
C F

Sit ratio X ad Z, ea quam inſcripta ſemper habent inter ſe. Si ergo negas rationem figurarũ A,B, eandem eſſe cum ratione X ad Z, quã ſemper habent ea, quæ figuris inſcribuntur, ſit ratio A ad B primo major ratione X ad Z. Ergo alia quædam quantitas R minor quam figura A, erit ad figuram B, ut X ad Z. Quoniam inſcripta per hyp. deſinunt in figuras A & B, erunt aliqua figuris A & B inſcripta, quæ ab ipſis deficiant *a* minori quantitate quam R deficiat à figura B. Sint ea, C & F. Ergo C erit majus q̃uam R. Ergo C eſt ad B in *b* majori, quam R ad B; hoc eſt (ut ponebatur) q̃uam X ad Z; hoc eſt per hyp. quam idẽm C ad F. Quoniam igitur C eſt ad B in majori proportione, quam ad F, erit B figura minor *c* ſibi inſcripto F, totum ſua parte. Eodem modo oſtendetur rationẽ B ad A, non poſſe eſſe majorem ratione Z ad X. Er-

a *Per defin. 6. l. 12.*

b *Per 8. l. 5.*

c *Per 10. l. 5.*

X. Ergo ratio A ad B æqualis eſt rationi, X ad Z. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO. III. & IV.

SUnt prolixæ & difficiles tyronibus, nec alium habent uſum, quàm ut per eas demonſtretur quinta, quam nos ſine illis multò facilius demonſtrabimus.

Lemmata ad P. 5.

I.

SI duæ pyramides triangulares ſecentur planis (OSE, RXZ) ad baſes (ABC, IQV) parallelis, quæ dividant latera (CF, QL,) proportionaliter (in E & Z:) erunt (OSE, RXZ) inter ſe ut baſes (ACB, IQV.) Fig. 9

Quoniam parallela plana OSE, ABC ſecantur à planis BFC, AFB, AFC, erunt, ſectiones communes SE, BC, & OS, AB, & OE, AC *a* parallelæ. Ergo anguli OSE, ABC, & SOE, BAC, & OES, ACB, bini & bini, æquales *b* ſunt. Quare ſectiones OSE, ABC *c* ſunt ſimiles. Eodem modo ſimiles eſſe oſtendam ſectiones RXZ, IVQ. Ergo ratio ſectionis ABC ad OSE eſt duplicata *d* rationis laterum BC ad SE; & ratio ſectionis IVQ ad RXZ duplicata eſt rationis VQ ad XZ. Atqui rationes BC ad SE, & VQ ad XZ ſunt eadem (eſt

a Per 16. l. 11.
b Per 10. l. 11.
c Per 4. l. 6.
d Per 19. l. 6.

e Per corol. 1 p. 4. l. 6. enim B C ad S E, ut *e* C F ad E F; hoc eſt per hyp. ut Q L ad Z L; hoc *f* eſt ut V Q ad X Z.) Ergo ratio A B C, ad O S E eadem eſt *i* cum ratione I V Q, ad R X Z. Quod erat propoſitum.

f Per idem corol.

i Per 35. l. 5.

II.

Fig. 10. P*yramidi* (*ZCAF*) *triangulum habenti baſim, priſmata in infinitum imſcripta, deſinunt in ipſam pyramidem.*

Dividatur latus pyramidis in aliquot æquales partes AB, BG, GF, & per B, G factis ſectionibus G D N & B E P baſi ZAC parallelis inſcripta intelligantur pyramidi priſmata triangularia BEPM A O, & G D N K B Q. His deinde extra pyramidem continuatis, intelligantur pyramidi eſſe circũſcripta priſmata C I BA, PXGB, NHFG. Exceſſus circumſcriptorum ſupra inſcripta ſunt ſolida I M, X K, H G, quæ ſimul ſumta æquantur priſmati C I BA: nam H G eſt *o* æquale D B, ac proinde H G cum X K æquatur P X GB, hoc eſt *p* M E B A: Ergo tria HG, XK, IM, æquantur toti C I BA. Atqui ſi A F in plures ſine fine partes æquales dividatur, ac proinde priſmatum numerus in infinitum multiplicetur, AB fiet *a* quavis data minor. Ergo etiam *b* priſma C I B A fiet quovis dato minus. Ergo priſmatum circumſcriptorum (multo-

o Per 25. l. 11

p Per eand.

a Collig. ex lem. 2. Schol. poſt. 11. l. 6.

b Patet ex 25. l. 11.

(multoque magis pyramidis Z C A F, quæ pars eſt priſinatum ſibi circumſcriptorum.) Exceſſus ſupra inſcripta priſmata, fiet quovis dato minor. Ergo inſcripta priſmata in pyramidem *c* tandem deſinunt. Quod erat demonſtrandum. c *Per deſin. 6. l. 11.*

PROPOSITIO V.

Pyramides triangulares æquè altæ, eam inter ſe proportionem habent, quam baſes (A Q R, E S X.) *Fig. 11.*

Pyramidum altitudines æquales referant latera A P, E Z, quibus in quot placuerit, æquales partes, ſed æquè multas, vtrimque, diuiſis; factiſque per diuiſionum puncta ſectionibus ad baſes parallelis, intelligantur utrique pyramidi inſcripta eſſe priſmata trigona æquè multa & æquè alta. Iam verò quia priſmata L A, I F ſunt æquè alta, erit priſma L A ad priſma I E, ut *a* baſis L O B ad baſim I N K hoc eſt *b* ut baſis Q R A ad baſim S X E. Eodem modo oſtendam ſingula priſmata pyramidi Q P A R inſcripta, eſſe ad ſingula inſcripta pyramidi, S Z E X, ut baſis Q A R ad baſim S E X. Ergo etiam *c* ſimul omnia ſunt ad omnia, ut baſis ad baſim. Quare cum ea tandem deſinant *d* in ipſas pyramides, etiam ipſæ erunt *e* ut baſes. Quod erat demonſtrandum.

a *Per corol. 1. p. 34. l. 11.*
b *Per lem. 1.*
c *Per 12. l. 5.*
d *Per lem. 2.*
e *Per poris. univerſ. poſt p. 2. l. 12.*

PROPOSITIO VI.

Fig. 12. & 13. *PYramides quæcunque æquè altæ, eam inter ſe rationem habent, quam baſes (A B, C F O.)*

Reſolvantur baſes in triangula A, B, C, F, O; pyramides verò totæ in pyramides triangulares. Pyramis A X eſt ad pyramidem O Z, ut *a* A ad O; & pyramis *b* B X eſt ad pyramidem O Z, ut B ad O. Ergo pyramides ſimul A X, B X (hoc eſt tota A B X) ſunt ad pyramidem O Z, ut A, B *c* ſimul ad O. Eodem diſcurſu pyramis A B X eſt ad pyramidem F Z, ut *d* A B eſt ad F: Et A B X eſt ad C Z, ut *e* A B eſt ad C. Ergo A B X *f* eſt ad tres ſimul O Z, F Z, C Z, hoc eſt ad totam pyramidem O F C Z, ut A B ad O F C. Quod erat demonſtrandum.

a Per præc.
b Per eand.
c Per 24. l. 5.
d Per præc.
e Per 24. l. 5.
f Per eand.

PROPOSITIO VII.

OMnis pyramis tertia pars eſt priſmatis habentis eandem baſim & altitudinem.

Fig. 14. Sit primò pyramis trigona B G A C, in eadē baſi & altitudine cum priſmate B A C F E O, ducantur B F, A O, A F. Triangula B F C,

BFC, BFO ſunt *a* paria. Ergo pyramis BFCA pyramidi BOFA *b* æqualis eſt. Ob eandem cauſam pyramis OEAF par eſt pyramidi OBAF, hoc eſt pyramidi BOFA, ſunt enim eædem pyramides. Igitur etiam BFCA, & OEAF æquales ſunt. Omnes igitur tres BFCA, OEAF, OBAF, ſive BOFA ſunt pares. Ergo tres ſimul unius BFCA triplæ ſunt. Atqui tres illæ conſtituunt priſma BACFEO. Illud ergo pyramidis BFCA, hoc eſt *c* BGAC, triplum eſt. Quod erat demonſtrandum.

a Per 34. l. 1
b Per 5. l. 12.
c Per 5. l. 11.

Sit deinde pyramis quævis eandem habens baſim & altitudinem cum priſmate AEFH ductis lineis BC, BO, BE & NI, NG, NH, reſolve priſma in triangularia priſmata, & pyramidem in trigonas pyramides. Quo facto patet demonſtratio ex prima parte. Nam ſingulæ partes priſmatis triplæ erunt ſingularum partium pyramidis. Ac proinde totum priſma totius pyramidis triplum eſt. Quod erat demonſtrandum.

Fig. 15.

PROPOSITIO VIII.

SImilium pyramidum (OACB, KHIN) proportio eſt triplicata eius, quam habent homologa latera (AB, HN.)

Fig. 16.

 Sint

Sint primo trigonæ; perfectis parallelogrammis A M & H Q, ſuper his conſtitue parallelepipeda AG, H L, in altitudine pyramidum quæ cum pyramides ſint ſimiles, etiam patet ſimilia *a* eſſe. Ducantur jam E F, R P, & per E F, C B, item per R P, I N ſecabuntur *b* parallelepipeda in duo priſmata æqualia: ſingula horum *c* tripla ſunt pyramidum O A C B, & K H I N. Utraque ergo ſimul; hoc eſt tota parallelepipeda, A G, H L, ſextupla ſunt pyramidum. Pyramides ergo parallelepipedis proportionales ſunt. Sed horum ratio *d* triplicata eſt rationis laterum A B, H N. Ergo & illarum. Quod erat demonſtrandum.

a Defin. 9. l. 11.
b Per 28. l. 11.
c Per præc.
d Per 33. l. 11.

Quod ſi pyramides ſimiles fuerint poligonæ, reſolvantur in triangulares A R, B R, C R, & O K, E K. F K Facilè *e* oſtendes etiam A R ipſi O K, & B R ipſi E R, & C R ipſi F K eſſe ſimiles. Ergo per 1. partem ratio pyramidum A R, O K eſt triplicata rationis I M ad P Z: & ratio pyramidum B R & E K triplicata eſt rationis M X ad S Z; hoc eſt denuo per hyp. rationis I M ad P Z: & ratio pyramidum C R, F K eſt triplicata rationis X Q ad S T, hoc eſt rurſum I M ad P Z. Cum ergo ratio ſingularum ad ſingulas ſit triplicata rationis I M ad P Z, etiam ratio *e* omnium ad omnes (hoc eſt ratio totius pyramidis A B C R ad totam

Fig. 17.
e Ex 20. & 5. l. 6. & ex defin. 9. l. 11.
e Per 12. l. 5.

totam O K F K) triplicata erit rationis IM ad PZ. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO IX.

ÆQuales pyramides reciprocant baſes, & altitudines: & quæ reciprocant, ſunt æquales. Fig. 18. & 19.

1. Pars. Sint primò pyramides trigonæ BACO, HKNL: perfectis parallelogrammis BE, HR, ſuper his ſint parallelepipeda BF, HP. Erunt (ut oſtendimus in 8.) pyramidum ex hyp. æqualium ſextupla, ac proinde æqualia inter ſe. Sunt verò horum parallelepipedorum altitudines HK, BA, eædem, quæ pyramidum: baſes verò BE, HR duplæ o ſunt baſium pyramidalium o Per 34. l. 1. BCO, HNL, ac proinde iis proportionales. Cum igitur ob parallelepipedorum æqualitatem, ſit ut BE ad HR, ita a reciprocè HK ad BA, a Per 34. l. 11. etiam erit ut baſis BCO ad baſim HNL, ita reciprocè altitudo HK ad altitudinem BA. Quod erat demonſtr.

Quod ſi pyramides habeant baſes polygonas, retentis iiſdem altitudinibus reducantur ad trigonas eruntque hæ illis æquales per 6. Sed pyramides ſic reductæ per jam demonſtrata reciprocant baſes & altitudines. Ergo etiam pyramides datæ polygonæ

gonæ reciprocant baſes & altitudines. Quod erat demonſtrandum.

2. Pars. Quoniam jam ponitur eſſe B C O ad H N L, ut H K ad B A, erit quoque B E ad H R, ut H K ad B A. Ergo parallelepipeda B F, H P *b* ſunt æqualia, ergo & ſextæ eorum partes, nempè pyramides B A C O, H K N L. Quod erat demonſtrandum.

b Per 34. l. 11.

Corollaria.

QUæ de pyramidibus demonſtrata ſunt p. 6. 8. 9. etiam conveniunt quibuſcunque priſmatis; cùm hæc tripla *c* ſint pyramidum eandem baſim & altitudinem habentium. Igitur

c Per 7. l. 12.

1. Priſmatum æquè altorum eadem eſt proportio, quæ baſium. Id enim oſtenſum eſt de pyramidibus p. 6.

2. Similium priſmatum proportio eſt triplicata proportionis homologorum laterum. Id enim oſtenſum eſt de pyram. p. 8.

3. Æqualia priſmata reciprocant baſes & altitudines, & quæ reciprocant ſunt æqualia. Id enim de pyramidibus oſtenditur p. 9.

Mirum eſt hæc ab Euclide prætermiſſa, cum præcipua ſint, quæ de ſolidis rectilineis tradi poſſunt.

Scholium.

Scholium.

Ex hactenus demonſtratis elicietur dimenſio quorumcunque priſmatum ac pyramidum.

Priſmatis ſoliditas producitur ex altitudine in baſim ductâ, pyramidis verò ex tertiâ altitudinis parte ductâ in baſim.

Ut ſi priſmatis altitudo ſit 5. pedum, baſis vero 25. pedum quadratorum, multiplica 25. per 5. proveniunt 125. pedes cubici pro ſoliditate priſmatis.

Eſto enim priſma polygonum AH. Ejus baſi AE intelligatur æquale eſſe triangulum BAC, ſuperque eo priſma BE æquè altum ac AH. Erunt c BE, AH æqualia priſmata. Sed BE priſma d producitur ex altitudine ſua in baſim BAC, hoc eſt e AE. Ergo etiam priſma AH ſit ex altitudine ſuâ, quæ altitudini priſmatis BE æqualis ponitur, in baſim AE. *Fig. 15. & 14.* c *Per corol. 1. præced.* d *Per ſchol. p. 40. l. 11.* e *Per conſtr.*

Hinc vero & ex 7. patet demonſtratio partis ſecundæ.

Lemma ad P. 10.

PYramides & priſmata, quæ conis & cylindris in infinitum inſcribuntur, in conos & cylindros deſinunt.

Demonſtratur ut lemma propoſitionis 2. adminiculo propoſitionis 6. & corollarii 1. poſt p. 9. ſi ut iſtic plana circulo inſcripta, ita hîc pyramides & priſmata, quæ ſuper planis illis tanquam baſibus conſiſtunt, à cono & cylindro auferantur.

PRO-

PROPOSITIO X.

Omnis conus tertia pars eſt cylindri eandem baſim & altitudinem habentis.

Fig. 20. Baſi CL intelligatur inſcribi polygonum regulare quotcunque laterum, & ſuper illo tanquam baſi, cono quidem pyramis, cylin- a Per 7. l. 12. dro autem priſma inſcribi. Erit pyramis *a* tertia pars priſmatis. Et ſi rurſum inſcribatur circulo polygonum laterum duplo plurium, ſuperque eo inſcribatur cono pyramis & cylindro priſma; iterum erit pyramis tertia pars priſmatis; Atque hoc ſemper eveniet. Quare cum pyramides in co- b Per lem. prac. num, *b* priſmata in cylindrum deſinant, e- c Per Poriſ. unico poſt 2. l. 12. tiam *c* conus tertia pars cylindri erit. Quod erat demonſtr.

PROPOSITIO XI.

Fig. 20. & 21. *Conorum æquè altorum (B A F, Q X R) Q X R) proportio eadem eſt, quæ baſium (CL, SE.) Idem accidit cylindris æquè altis.*

Pyramides conis æquè altis inſcriptæ ſunt, *d* ut baſes. Atqui *e* pyramides tandem d Per 6. l 12 in conos deſinunt. Ergo etiam *f* coni ſunt ut e Per lem. ante 10. l. 12 baſes. Cum verò cylindri conorum eandem f Per poriſ. univ. cum ipſis baſim & altitudinem habentium ſint

10. &

[library stamp]

r 8. *l.*12.
de-
ſt. in 1.

r law.
110. *l.*12.
rporis.
v.

Digitized by Google

Fig. 20.

a *Per* 7.
l. 13.

b *Per le*
trac.
c *Per P*
unru p
2. *l.* 12.

Fig. 20.
21.

d *Per* 6.
e *Per len*
ante 10
f *Per po*
univ.

ſint tripli, etiam ipſi erunt, ut baſes. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

EOdem modo demonſtrabitur etiam priſmata & cylindros æquè alta eſſe inter ſe ut baſes, imò quælibet corpora cylindriformia æquè alta, hoc eſt quæ producuntur ex quibuſcunque planis in eandem altitudinem ductis, eſſe inter ſe ut baſes. Eodem modo de pyramidibus & cono æquè altis, & conicis quibuſcunque ratiocinare.

PROPOSITIO XII.

CONorum ſimilium (BAF et QZR) proportio eſt triplicata proportionis diametrorum (BF & QR) quæ ſunt in baſibus. Idem cylindris ſimilibus accidit. Fig. 20. & 21.

Similium conorum baſibus inſcribe polygona ordinata, quæ proinde ſimilia erunt. Pyramides ſuper his polygonis inſcriptæ conis, etiam ſimiles ſunt; quod facile oſtenditur. Ergo earum proportio eſt triplicata *a* proportionis laterum BL, QE; hoc eſt *b* proportionis diametrorum BF, QR. Quare cum pyramides *c* in conos deſinant, etiam conorum proportio *d* eſt triplicata proportionis diametrorum BF, QR. Quod erat demonſtrandum.

a *Per* 8. *l.* 12.
b *Eſt demonſt. in* 1. *l.* 12.
c *Per lem. ante* 10. *l.* 12.
d *Per poriſ. noviv.*

De

De cylindris patet theorema cum ſint tripli conorum.

PROPOSITIO XIII.

Fig. 22.

SI cylindrus (B I) ſecetur plano (R L) baſibus (B Q, C I) parallelo; erit pars (B L) ad partem (R I) ut axis ſegmentum (A O) ad ſegmentum axis (O F.)

Demonſtratur ut prima ſexti.

Theorema eodem modo verum eſt de ſuperficie.

PROPOSITIO XIV.

Fig. 23. & 24.

CYlindri (A R & C I) baſibus (M Q, G H) æqualibus, ſunt inter ſe ut altitudines (L Z, S F.) idem conis accidit.

Abſcinde ab altiori cylindro A R cylindrum A O, altitudinis L E ejuſdem cum S F. Igitur cylindri A O, C I *a* æquales ſunt. Cum igitur cylindrus A O ſit ad cylindrum A R, ut *b* L E ad L Z, etiam C I erit ad A R, ut L E ad L Z, hoc eſt (quia L E & S F *c* æquantur) ut S F ad L Z. Quod erat demonſtrandum.

a Per 11. l. 12

b Per prac

c Per conſtr.

Corollarium.

THeorema etiam verum eſt de priſmatis, itemque de pyramidibus, & demonſtratio planè ſimilis. Sed de priſmatis ex corol. 1.

rol. 1. p. 9. 12. &. 25. l. 11. ejuſque coroll. De pyramidibus ex hoc, & ex. 7. l. 12.

PROPOSITIO XV.

ÆQuales cylindri (AR, DF) reciprocant, baſes & altitudines; & ſi reciprocant, æquales ſunt. Idem conis accidit. Fig. 2, & 4. 25.

Demonſtratur ut P. 34. l. 11. ſed pro 32. & 25. iſthic citatis, hîc adhibebitur prop. 11. & 13. lib. 12.

Scholium.

CUm nihil attulerit Euclides de ratione compoſita in corporibus, eam breviter hoc loco demonſtrabimus.

1. Cylindrus ad cylindrum, & priſma ad priſma, rationem habent compoſitam ex rationibus baſium & altitudinum.

Sunto cylindri FD, & AR. Ab altiori AR (nam in æquè altis res per ſe patet) abſcinde AO æquè altum ac FD. Sit etiam ut baſis VT ad baſim MQ, ita FN ad X & ut altitudo ND, ſeu BO, ad altitudinem BR, ita X ad Z. Oportet igitur oſtendere cylindrum FD eſſe ad cylindrum AR, ut FN eſt ad Z. Cylindrus FD eſt ad cylindrum AO, ut a baſis VT ad baſim MQ hoc eſt b ut FN ad X, cylindrus autem AO eſt ad cylindrum AR, ut c BO ad BR; hoc eſt ut d X ad Z. Igitur ex e æquo cylindrus FD eſt ad cylindrum AR, ut FN ad Z. Fig. 25 & 24.

a Per 11 l. 12
b Per conſtr.
c Per 13 l. 12
d Per conſtr.
e Per 22. l. 5.

De priſmatis res eodem modo demonſtrabitur,

ſed

ſed ex corollario 1. p. 9. & coroll. p. 14.

2. *Etiam conus ad conum & pyramis ad pyramidem rationem habent compoſitam ex rationibus baſis ad baſim, & altitudinis ad altitudinem.*

e Per 10. n. 7. l. 12. *Sunt enim e cylindrorum ac priſmatum partes tertiæ.*

PROPOSITIO XVI. XVII.

HÆ *propoſitiones omnium prolixiſſimæ non alium uſum habent, quam ut demonſtretur P. 18. quam nos aliâ faciliori viâ demonſtrabimus.*

Lemma ad P. 18.

Fig. 26. *Cylindri hemiſphærio inſcripti in hemiſphærium deſinunt.*

Sit PZY maximus hemiſphærii ſemicirculus, ſitque radius A Z perpendicularis diametro P Y. Seca A Z in aliquot æquales partes A M, M N, N Z; ductiſque per diviſionum puncta M, N, perpendicularibus, &c. Inſcribantur ſemicirculo rectangula O B R K, E D H S, quibus deinde extra circulum continuatis, ſemicirculo circumſcripta intelligantur rectangula F T Y P, L V B O, Q X D E Eruntque omnia æquè alta, exceſſus autem circumſcriptorum ſupra inſcripta, ſunt plana F K, L S, X E, V H, T R, quæ ſimul ſumta conficiunt rectangulum F T Y P; nam quia X E æquatur D S, erunt L S, V H,

VH, X E ſimul, æqualia rectangulo L B; hoc eſt O R. Quare ſi adjicias utrimque plana F K, T R, erunt ſimul omnia FK, L S; X E, VH, TR æqualia rectangulo FTYP. Si jam intelligatur ſemicirculus cum rectâgulis circa radiũ immotum A Z, circumagi, inſcripta rectangula EH, O R producent cylindros hemiſphærio inſcriptos, & rectangula circumſcripta producent cylindros hemiſphærio circumſcriptos, ſibi mutuo inſiſtentes; & ſicut rectangulorum circumſcriptorum exceſſus, ſupra inſcripta rectangula erat rectangulorum FY, ita etiam cylindorum circumſcriptorum exceſſus ſupra inſcriptos erit cylindrus à rectangulo FY genitus. Atqui hujus cylindri altitudo fiet quâvis datâ minor, adeoque etiam ipſe quovis dato *b* evadet minor, ſi radio in plures ſine fine partes diviſo rectangulorum, indeque & cylindrorum numerus ſine fine multiplicetur. Ergo cylindrorum circumſcriptornm, multoque magis ipſius hemiſphærii, quod cylindrorum circumſcriptorum pars eſt, exceſſus ſupra inſcriptos cylindros fiet tandem quovis dato minor. Ergo cylindri hemiſphærio in infinitum inſcripti tandem deſinunt *c* in hemiſphærium. Quod erat demonſtrandum.

b Patet ex 13. l. 12.

c Per defini. 6. l. 12.

Corollarium.

EOdem modo demonſtrabitur cylindros, cono, conoidi, ſphæroidi, &c. inſcriptos, in ipſa deſinere.

PROPOSITIO XVIII.

Fig. 27. *SPhærarum proportio eſt triplicata proportionis diametroru m (B K, R Z.)*

Radijs A B, Y R in quot placuerit æquales partes, ſed æquè multas, diviſis, ductiſque per diviſionum puncta perpendicularibus &c. Intelligantur maximis ſphærarum ſemicirculis, inſcripta eſſe rectangula æquè multa, quæ circa radios immotos A B, Y R circumacta, inſcribant utrique hemiſphærio cylindros æquè multos, ſibi inuicem inſiſtentes. Quia K C *o* eſt ad C F, ut C F ad C B. Erit ratio K C ad C B duplicata *a* rationis K C ad C F, hoc eſt rationis F G ad C B. Similiter erit ratio Z E ad E R, duplicata rationis X E ad E R. Sed per conſtr. eſt K C ad C B, Z E ad E R. Ergo etiam *b* F C eſt ad B C, ut X E ad E R. Sed B C eſt ad C O per conſtr. ut R E ad E S. Igitur ex æquo *c* F C eſt ad C O, ut X E ad E S. Cylindri igitur *d* F L, X Q ſimiles ſunt, ac proinde eorum proportio eſt triplicata *e* proportionis diametrorum F I, X V,

o *Per coroll. p. 13. l. 6.*
a *Per deſin. 10. l. 5.*
b *Per 35. l. 5.*
c *Per 22. l. 5.*
d *Per deſin. 4. l. 12.*
e *Per 12. l. 12*

XV, ſeu ſemidiametrorum FC, XE, quæ ſunt in baſibus. Sed proportio F C ad X E eadem eſt cum proportione quæ eſt inter diametros ſphærarum BK, RZ, (nam ut jam oſtendi FC eſt ad XE, ut CO ad ES; hoc eſt ut B K ad R Z, ipſarum C O, E S per conſtr. æquè multiplices.) Ergo ratio cylindrorum FL, XQ eſt triplicata rationis diametrorum B K, RZ. Eodem modo demonſtrabimus ſingulos cylindros hemiſphærio uni inſcriptos, ad cylindros ſingulos inſcriptos alteri hemiſphærio ratio nem habere triplicatam rationis diametrorum B K, R Z. Ergo etiam ratio ſimul omnium, ad omnes ſimul *i* triplicata eſt rationis diametrorum BK, RZ. Quare cùm aggregata cylindrorum tandem in hemiſphæria *k* deſinant, hemiſphæriorum quoque, ac proinde & ſphærarum ratio triplicata erit *n* rationis diametrorum. Quod erat demonſtrandum.

i Per 12. l. 5.
k Per lem. præced.
n Per poriſ. univerſ.

Corollarium.

NOtâ igitur proportione diametrorum, etiam ſphærarum proportio innoteſcit ut ſi minoris diameter ſit unius pedis, majoris 10. continuetur ratio 1 ad 10 per quatuor terminos, 1. 10. 100. 1000. ut 1. ad 1000: quartũ terminũ, ita ſphæra minor ad majorẽ.

Conorum, Cylindrorum, ſphæræ dimenſio dabitur libro ſeq. ex Archimede.

Scholium.

QUemadmodum ſimiles planæ figuræ per mediam proportionalem unam, ita corpora ſimilia non niſi per medias duas, in proportione data augentur vel diminuuntur.

Data ſit ſphæra vel cubus, vel aliud corpus quodcunque, cujus radius ſive latus ſit A. Data item ſit proportio quæcunque A ad B ut dupla. Oporteat exhibere corpus, & duplum dati & ſimile.

Inter terminos rationis datæ A & B; inveniantur duæ mediæ proportionales X, Z ut docuimus in ſcholio poſt 13. l. 6. Sphæra cujus radius eſt X, ſive corpus dato ſimile, factum ſuper latere X, erit duplum dati.

Nam corpora ſimilia quorum radii, ſeu latera ſunt A & X, rationem inter ſe habent triplicatam a *rationis A ad X, hoc eſt, eandem,* b *quam A habet ad B.*

a *Corol. 2. p. 9. & per 12. ac 18. l. 12.*
b *Per defin. 10. l. 5.*

Atque hoc eſt celebratiſſimum illud problema, quod Deliacum à Deliaco Apolline dictum eſt, quòd is lue ſæviſſimâ Athenas populante conſultus reſpondiſſet, peſtem ceſſaturam, ſi ejus ara, quæ cubica erat, duplicaretur. Ita Valerius Maximus l. 8.

AN-

ANDREÆ

TACQUET

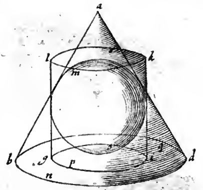
E SOCIETATE IESU,

SELECTA EX

ARCHIMEDE

THEOREMATA:

Via faciliori ac breviori demonſtrata, & novis inventis aucta.



VNA TRIBVS RATIO EST

AMSTELÆDAMI,

Sumtibus HENRICI WETSTENII.

Digitized by Google

LECTORI.

Quamvis in Mathematicis diſciplinis complures ſummi & admirabiles viri extiterunt: prima tamen gloria communi quodam conſenſu Archimedi Syracuſano delata eſt. Sed illum plures laudant, quàm legant; admirantur plures, quàm intelligant. Cauſæ, opinor, ſunt exemplarium moles, & raritas, ſermonis ex Græco tranſlati obſcuritas nonnulla, demonſtrationes prolixæ & arduæ. Putavi igitur ex ſtudioſæ juventutis uſu futurum, ſi elementis jam illuſtratis, hæc à me ſelecta ex Archimede theoremata; & viâ multò faciliori ac breviori demonſtrata ſubnecterem. Selegi porro ea, quæ & admirationis plus, & utilitatis habent, viamque in demonſtrando eam tenui, ut ſperem, eum, qui elementa perceperit; hæc ſummi Geometræ præclariſſima inventa negotio haud magno aſſecuturum. Sub finem adjectis tredecim propoſitionibus, Archimedis de cylindro & ſphærâ doctrinam ampliorem facio, atque inter cætera demonſtro ſeſquialteram proportionem in tribus corporibus, ſphærâ, cylindro, & æquilatero cono, utroque ſphæræ Circumſcripto, continuari. Varia inſuper ſparſim, inter quæ propoſitio 12. & corollaria prop. 14. præcipua ſunt, & ſcholia omnia adieci. Fruere iſtis quiſquis Geometriæ candidatus es, & quantùm ex

Euclide profeceris, in Archimede experire. Cumque in veritatum pulcherrimarum contemplatione deſigite, evehique ſurſum perſenſeris, mentem ab infimis hiſce rebus feliciter jam avulſam attolle etiam altiùs, atque dirige ad veritatem primam æternam, immenſam, quæ Deus eſt; cujus ineffabili viſione nos futuros aliquando æternùm beatos confido. Vale.

DEFINITIONES.

Seu vocum nonnullarum explicatio.

ESto circulus B E C G, cujus centrum A diameter B C, quam ad rectos angulos ſecet recta E G non per centrum videlicet in D. Ex centro autem educantur radii A E, A G. His poſitis. *Fig. 23. tab. 6. ex Archim.*

1. Sector ſphæræ eſt, qui à ſectore circulari AECG ſeu AEBG, circa diametrum B C in orbem acto, producitur.

2. Segmentum ſeu portio ſphæræ, eſt quæ à circulari ſegmento EC G, ſeu EBG, circa eandem diametrum B C in orbem acto, deſcribitur.

3. Portionis ſphæricæ (EBG) vertex eſt diametri immobilis extremitas B: Baſis eſt circulus à rectâ E G deſcriptus. Axis eſt diametri pars B D inter verticem B, & D centrum baſeos intercepta.

4. Cum ſphæricæ portionis aut corporis ei inſcripti, aut coni ſuperficiem nomino, ſemper intelligo abſque baſi; & dum cylindri ſuperficiem dico, intelligo ſimiliter abſque baſibus; niſi adjungatur (*tota*) tunc enim accipiuntur & baſes.

Rur-

Rurſum cum de cylindris vel conis ago, non alios intelligo quam rectos.

Axiomata.

Fig. 1. & 16 1. POlygoni circulo inſcripti ambitus minor eſt circuli peripheriâ.

Fig. 1. 2. Polygoni circulo circumſcripti ambitus circuli peripheriâ maior eſt.

Fig. 16. 3. Quod ſi polygonum circulo inſcriptum circa diametrum (AE) unà cum circulo circumagatur, erit corporis à polygono geniti ſuperficies minor ſphæræ ſuperficie. Et ſi polygonum circulo circumſcriptum circa diametrum unàcum circulo circumagatur, erit corporis à polygono geniti ſuperficies major ſuperficie ſphæræ.

Fig. 17. 4. Similiter ambitus polygoni inſcripti ſegmento circulari(D A F) minor eſt peripheriâ ſegmenti(DAF.) Et ſi polygonum ſegmento inſcriptum una cum ſegmento, circa ſegmenti axem(A O) circumagatur, erit corporis à polygono geniti ſuperficies minor ſuperficie portionis ſphæricæ(DAF.)

Fig. 3. & 6. 5. Superficies priſmatis cylindro inſcripti minor eſt cylindri ſuperficie; circumſcripti verò major.

Fig. 4. & 8. 6. Et ſuperficies pyramidis cono inſcriptæ minor eſt coni ſuperficie; circumſcriptæ autem major.

PRO-

PROPOSITIO PRIMA.

Data ſint figuræ quæcunque ſeu plana ſeu ſolidæ, A, B. Sint autem magnitudines aliæ ſemper atque aliæ, quæ figuras datas A ac B ſemper minùs ac minùs excedendo, in ipſas a *deſinant, & tamen ſemper inter ſe æquales ſint.* a Defin. 6. l. 12.

Dico etiam figuras, A, & B æquales eſſe.

Si non, alterutra	E.	F.	
major erit: ſit ergo	A.	A.	X.
A major. quam B			

exceſſu X. Per hypotheſim dantur magnitudines, E, F inter ſe æquales, quæ excedant figuras A, B exceſſu minori, quam X, quo A ponitur ſuperare B. Ergo F minor eſt quam A. Sed F per hypotheſim eſt æqualis E. Ergo etiam E minor eſt quam A, quod eſt abſurdum; cum per hyp. E excedat A. Eodem modo oſtendam B non poſſe eſſe majorem quam A. Ergo cum neutra ſit major alterâ, æquales erunt, Quod erat demonſtrandum.

PRO-

PROPOSITIO II.

DAtæ ſint figuræ A & B; ſint autem magnitudines aliæ ſemper atque aliæ, quæ à figuris datis ſemper minùs ac minus deficiendo, in ipſas b *deſinant, & ſemper inter ſe æquales ſint.*

b *Deſin.* 6. *l.* 12.

Dico etiam figuras datas A, B æquales fore.

A. B. Z.
O. P.

Si non, alterutra minor erit. Eſto igitur A minor quam B defectu Z. Per hypotheſim dari poſſunt magnitudines O, P, inter ſe æquales, quæ deficiant à figuris datis A & B defectu minori quam Z, quo ponitur A deficere à B. Ergò P major eſt quàm A. Sed P per hypotheſim eſt æqualis O. Ergo etiam O major eſt quàm A, quod repugnat hypotheſi, quâ ſtatuitur O minor quam A. Eodem modo oſtendam B non eſſe minorem quâm A. Quare cum neutra ſit minor alterâ, æquales erunt. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO III.

AMbitus polygonorum circulo circumſcriptorum, & inſcriptorum, dè-

deſinunt in circuli peripheriam. Similiter & polygona ipſa in circulum deſinunt.

Si nimirum arcubus ſine fine biſectis plura ſemper ac plura latera circulo circumſcribantur & inſcribantur. *Fig. 1. tab. 6. ex Archim.*

1. Pars. Intelligantur circulo inſcripta & circumſcripta polygona ordinata; ſive ut traditur p. 12. l. 4. ſive ut in hac figura, perinde erit. Manifeſtum eſt *a* F I eſſe ad E C (hoc eſt *b* totum ambitum circumſcriptum ad totum ambitum inſcriptum) ut I A eſt ad C A. Atqui I C exceſſus rectæ I A ſupra C A, ſit tandem quâcumque datâ minor, ſi plura ſemper ac plura in infinitum latera circumſcribi & inſcribi intelligamus. Ergo etiam exceſſus ambitus circumſcripti ſupra ambitum inſcriptum tandem fiet quovis dato minor. Ergo multò *c* magis exceſſus ambitus circumſcripti ſupra peripheriã fiet quocunque dato minor. Similiter, quia iam oſtendi defectum ambitus inſcripti ab ambitu circumſcripto fieri quovis dato minorem, multò *o* magis defectus inſcripti ambitus à peripheriâ fiet quovis dato minor. Ambitus igitur tam inſcripti quam conſcripti in peripheriam *d* deſinunt. Quod erat primum. Hæc ulteriùs demonſtrare operę pretium non eſt, cum ſatis ſint manifeſta.

a *Per corol. 1 p. 4. l. 6.*
b *Per 12. l. 5.*
c *Patet ex axio. 1.*
o *Patet ex axio. 1.*
d *Defin. 6. l. 12.*

2. Pars. Quia iam oſtenſum eſt exceſ-

ſum

ſum lateris FI ſupra latus EC fieri tandem quovis dato minorem (eſt enim FI ad EC, ut IA ad CA) etiam exceſſus quadrati FI, ſupra quadratum EC fiet quovis dato minor. Sed ut quadratum FI ad quadratum EC, ita *e* polygonum circumſcriptum ad polygonum inſcriptum. Ergo etiam exceſſus polygoni circumſcripti ſupra inſcriptum tandem fiet dato minor. Ergo multo magis exceſſus polygoni circumſcripti ſupra circulum tandem fiet dato minor; ac proinde & polygoni inſcripti defectus à circulo; dato minor aliquando erit. Igitur polygona circulo tam inſcripta quam circumſcripta in circulum *i* deſinunt. Quod erat alterum.

e Per 22. l. 6.

i Defin. 6. l. 12.

PROPOSITIO IV.

Fig. 1.
o Defin. 3. l. 4.

P*Olygonum o ordinatum circulo circumſcriptum (FINTR) æquatur triangulo, cujus baſis eſt ambitus polygoni, altitudo verò circuli radius.*

Et polygonum ordinatum circulo inſcriptum æquatur triangulo, cujus baſis eſt polygoni inſcripti ambitus, altitudo vero perpendicularis (AO) in latus unum ex centro ducta.

1. *Pars.*

1. Pars. Radius A B ad contactum ductus *a* eſt perpendicularis ad tangentem I F. Quare ſi ductis rectis A F, A I, A N &c. polygonum reſolvatur in triangula, erit radius A B communis omnium altitudo; adeoque triangula ipſa liquet eſſe æqualia. Ergo triangulum baſim habens parem ſummæ laterum F I, I N, N T &c. altitudinem verò A B, æquabitur illis *b* omnibus, hoc eſt toti polygono circumſcripto. a *Per 18. l. 3.* b *Patet ex 1. l. 6.*

2. Pars. Simili ferè ratiocinio concludetur

PROPOSITIO V.

Circulus eſt æqualis triangulo, cujus baſis eſt peripheria circuli, altitudo autem ſemidiameter. *Fig. 2.*

Polygona ordinata circulo circumſcripta, & triangula baſes habentia ambitum polygoni, altitudinem verò radium circuli, ſemper ſunt *a* æqualia. Atqui polygona circulo in infinitum circumſcripta, in circulum *b* deſinunt; ſimiliterque triangula (ut mox oſtendam) quæ pro baſi habent ambitum polygoni circumſcripti, pro altitudine verò radium A B, tandem deſinunt in triangulum pro baſi habens peripheriam, pro altitudine radium A B. Ergo *c* circulus, & triangulum pro baſi habens peripheriam, pro altitudine radium A B, æqualia ſunt. a *Per præc.* b *Per 3. huius.* c *Per 1. huius.*

Quod

Quod autem triangula ſub ambitu polygoni,& radio,deſinant in triangulum ſub peripheriâ & radio,ſic oſtendo. Triangula ſub ambitu circumſcripti polygoni & radio AB ſunt ad triangulum ſub peripheria & radio AB,ut *i* baſis ad baſim,nempè ut ambitus polygoni ad peripheriam;cum altitudinem habeant communem. Sed ambitus polygoni in peripheriam *k* deſinit. Ergo & trianguli deſinet in triangulum.

i Per 1. l. 5.

k Per 3. hujus.

Corollaria.

1. Ex hac & 41. l. 1. patet rectangulum ſub radio & dimidiâ circumferentia eſſe æquale circulo : ſub radio & totâ circumferentiâ eſſe duplum:ſub totâ diametro & totâ circumferentiâ eſſe quadruplum circuli.

Fig. 5. lib. 4. tabulá 3.

2. Circulus eſt ad quadratum ſibi inſcriptum ut circumferentia dimidia (CDE) ad diametrum ; ad quadratum verò circumſcriptum,ut quarta circumferentiæ pars ad diametrum.

Nam rectangulum ſub CDE & radio CA ſeu CF (hoc *d* eſt ipſe circulus) eſt ad rectangulum G F C E nimirum ſub F G & C F; (hoc eſt ad quadratum inſcriptum B C D E) ut *e* CDE dimidia circumferentia eſt ad F G ſeu C E diametrum; quòd erat primum, ac proinde circulus eſt ad

d Per coroll. praced.

e Per 1. l. 6.

duplum

duplum rectanguli G F C E (hoc eſt ad FH quadratum circumſcriptum)ut CDE ad duplam diametrum C E, ſive ut quadrans CD ad diametrum C E.

PROPOSITIO VI.

Circuli circumferentia diametrum continet minùs quam ter & unam ſeptimam (ſeu $\frac{10}{70}$) plus vero quam ter & $\frac{10}{71}$.

Ad hujus theorematis demonſtrationem aſſumit Archimedes polygona ordinata,alterum circulo circumſcriptum, inſcriptum alterum,utrumque 96 laterum. Deinde oſtendit 96 latera circulo circũſcripta continere diametrum minus qnam ter & $\frac{1}{7}$: ac proinde circumferentiam quæ ipſis minor eſt,etiã continere diametrum minus quam ter & $\frac{1}{7}$. Latera vero 96 circumferentiæ inſcripta(ac proinde & circumferentiam quæ ipſis major eſt) ampliùs cõtinere diametrũ quam ter $\frac{10}{71}$. Porro longior eſt hujus rei demonſtratio quam ut hoc loco adferri debeat. Quod ſi ad polygona plurium adhuc laterum Geometricum ratiociniũ velimus extendere,limites jam ſtatutos arctare poterimus,magis magiſque ſine termino,atq; ita propius in infinitum ad veram propor-

tionem accedere. Præſtitum eſt hoc à Ludolpho Ceulen, Grimbergero, Metio, Snellio, aliiſque. Proportiones præcipuas hactenus inventas hic ſubjicio.

Prima eſt Archimedis hujuſmodi

Diameter 7

Circumfer. 22. major verâ.

Diameter 71

Circumf. 223 minor verâ

Rationes 22 ad 7, & 223 ad 71. Si ad commune conſequens reducantur (quod fit eodem modo, quo fractiones revocantur ad eundem denominatorem) rationes orientur 1562 ad 497 & 1561 ad 497.

Poſitâ igitur diametro partium 497 erit circumferentia major verâ 1562 & circumferentia minor verâ 1561

Utraque igitur à vera differt quantitate minori, quam ſit $\frac{1}{497}$ pars diametri. Quod ſi rationes 7 ad 22, & 71 ad 223 reducantur ad commune conſequens, provenient rationes 1561 ad 4906, & 1562 ad 4906.

Poſitâ igitur circumferentiâ partium 4906. erit diameter minor verâ 1561. diameter major verâ 1562.

Utraque igitur à verâ diametro differt quantitate minori, quam ſit pars $\frac{1}{4906}$ circumferentiæ.

Proportio tradita à Metio eſt Archimedæâ

medæâ multò accuratior. Iuxta hanc eſt

Diameter 113,

Circumf. 355.

Inter omnes parvis numeris conſtantes nulla veræ propinquior: ex hac enim poſitâ diametro 10,000,000, provenit circumferentia 31,415,929, quæ à verâ ſolùm penes notam primam 9 differt exceſſu paulò majore, quam ſint duæ particulæ decimillioneſimæ diametri.

Sed utrâque multò exactior eſt gemina illa Ludolphi à Ceulen: prioris termini conſtant notis 21, poſterioris verò notis 36.

Diameter

100000000000000000000

circumf. major verâ

314159265358979323847

circumf. minor verâ

314159265358979323846

Differentia utriuſque circumferentiæ eſt particula una diametri denominata à numero, qui conſtat unitate & 20 cifris, ac proinde tam hæc quam illa à verâ circumferentiâ differt minori quantitate quam ſit diametri particula dicta, videlicet centies millioneſies millioneſies millioneſima.

Diameter

1000000000000000000000000

0000000000

Circumf. major verâ

314159265358979323846264338327950289.

Circumf. minor verâ.

314159265358979323846264338327950288.

Differentia utriuſque circumferentiæ, inter quam vera exiſtit, eſt diametri particula una, denominata à numero, qui conſtat unitate & 35 cifris, quæ particula ad diametrum minorem habet proportionem, quam arenula una ad orbem terræ. Non enim conſtat orbis terræ tot arenulis, quot continentur particulæ tales in diametro.

Fruſtra igitur ſit ulterius progredi. Progrediere nihilominus ultra in infinitum, ſi ratiocinium Geometricum, cujus methodum expeditam tradit Snellius, placuerit continuare.

Scholium.

PRoportionis jam traditæ fructus eximii, ſunt hi qui ſequuntur.

Inventio Diametri ex circumferentiâ.

MAjorem terminum uniuſè proportionibus jam traditis ſtatue primo loco, minorem ſecundo, circumferentiam tertio, his tribus numeris quæratur per regulam auream quartus proportionalis. Is erit quæſita diameter.

Vt ſi detur circumferentia maximi circuli terræ milliaria

milliaria continere Belgica unius horæ 8640, *& quæratur terræ diameter, ſic ſtabunt termini*

355 ——— 113 ——— 8640 ———.

multiplica jam ſecundum per tertium, & productum divide per primum; proveniunt milliaria Belgica 2750 $\frac{14}{71}$ *pro diametro orbis terræ.*

Inventio circumferentiæ ex Diametro.

TErminus minor unius è proportionibus ſupra traditis ſtatuatur primo loco: major ſecundo; Diameter nota tertio. His tribus numeris quæratur quartus proportionalis. Is dabit quæſitam circumferentiam.

Ut ſi detur orbis terræ diameter continere milliaria Belgica unius horæ 2750 $\frac{14}{71}$, *& quæratur ambitus, termini ita ſtabunt,*

113 ——— 355 ——— 2750 $\frac{14}{71}$ ———

Tunc ſecundum multiplica per tertium & productum divide per primum: proveniunt milliaria Belgica 8640 *pro ambitu orbis terræ.*

Quam modicè hæc circumferentia veram excedat, dictum eſt ſupra, exceſſu videlicet paulo majore, quam ſint diametri terreſtris duæ particulæ decimillioneſimæ hoc eſt 9 *circiter aut* 10 *pedibus Rhynlandicis, quorũ* 18000 *conſtituunt milliare horarium. Quod ſi utamur proportione Ludolphinâ etiam priori, cujus termini conſtant* 21 *notis; invenietur circumferentia inſenſibiliter à verâ differens*

 non

non ſolum diametro datâ milliariorum Belgicorum 2750, qualis eſt terræ; verum etiam licet diameter ponatur centum millionum eorundem milliariorum, qualis fortaſſe eſt diameter firmamenti: hâc enim poſita proveniet circumferentia minori quantitate à verâ differens, quàm una centimilioneſimâ particula pedis Rhynlandici. Quod ſi ad inveſtigandam circumferentiam orbis terræ utamur proportione Archimedis, intervallum circumferentiarum verâ majoris ac minoris excedet 5 milliaria Belgica. Non eſt igitur adhibenda Archimedæa proportio, niſi in quantitate parvâ: imò ſemper expediet Metiano uti, quæ & modicis conſtat terminis, & pluſquam millies exactior eſt.

Circuli dimenſio.

SEmidiameter multiplicata per dimidiam circumferentiam producit aream circuli; quemadmodum patet ex coroll. 1, p. 5. hujus.

Ut ſi ſemidiametrum orbis terræ, quæ neglectâ fractione continet milliaria Belgica 1375, multiplicemus per dimidium terræ ambitum, per milliaria nempè Belgica 4320; provenient milliaria Belgica quadrata 5, 940, 000 pro circulo maximo terræ. Differentia inventæ circularis areæ à verâ, habetur, ſi differentia inventæ circumferentæ dimidiæ, à dimidiâ verâ, ducatur in ſemidiametrum datam, aut ſi differentia ſemidiametri inventæ à verâ, ducatur in datam ſemicircumferentiam.

Dimenſio cylindrorum & Conorum.

EAm hic appono, quòd à circuli dimenſione pendeat.

Cylindrus igitur & priſma quodvis producitur ex altitudine multiplicata per baſim: Conus & pyramis ex tertia altitudinis parte in baſim ductâ, ſunt enim partes tertiæ cylindrorum ac priſmatum, eandem cum ipſis baſim & altitudinem habentium, per 10 & 7. l. 12.

Sit baſis Cylindri aut coni 50 ped. quadratorum, altitudo pedum 100. Duc 100 in 50; proveniunt 5000 pedes cubici pro ſoliditate cylindri. Duc tertiam partem altitudinis 100, nimirum $33\frac{1}{3}$ in 50 proveniunt $1666\frac{2}{3}$ pedes cubici pro ſoliditate coni.

PROPOSITIO VII.

CIrculorum peripheriæ eam inter ſe proportionem habent, quam diametri. *Fig. 6. l. 12. tab 5.*

Nam polygonorum ſimilium circulo ſine fine inſcriptibilium ambitus ſunt inter ſe ſemper ut *a* diametri AF&IC. Sed hi *b* ambitus in peripherias deſinunt. Ergo *c* etiam peripheriæ ſunt inter ſe ut diametri. Quod erat demonſtrandum.

a *Per corol. p. 1. l. 12.*
b *Per 3. huius.*

PROPOSITIO VIII.

SVperficies priſmatis cylindro tam circumſcripti, quam inſcripti æquatur rectangulo, cuius altitudo eſt latus cylindri, baſis vero æqualis perimetro baſis priſmaticæ.

Fig. 3. 1. Pars. Priſmatis conſcripti ſuperficies tangit cylindrum ſecundùm lineas E A, N F &c. quæ ſunt cylindri latera; hæc autem (quod ex hyp. cylindrus ſit rectus) ad planum baſeos recta ſunt, ac proinde etiam *c* recta lineas, C G, G M &c. Sunt verò & æqualia inter ſe. Igitur unum cylindri latus communis eſt omnium rectangulorum C O, O M, M H &c. altitudo. Conſcripti igitur priſmatis ſuperficies æquatur *f* rectangulo ſub ambitu baſis priſmaticæ & priſmatis ſeu cylindri latere contento.

c Per defin. 3. l. 11.

f Patet ex 1. l. 6.

Eadem eſt ratio ſecundæ partis, nam latus cylindri, communis rurſum eſt altitudo rectangulorum B D I K, K I Q P &c. quæ conſtituunt ſuperficiem priſmatis inſcripti.

PROPOSITIO IX.

Fig. 4. *PYramidis ordinatæ, cono recto circumſcriptæ ſuperficies, æqualis eſt triangulo,*

triangulo, cujus baſis eſt baſeos pyramidalis circumferentia (F H L D) altitudo autem latus coni (B G.)

Et pyramidis ordinatæ cono recto inſcriptæ ſuperficies æquatur triangulo, cujus baſis eſt baſeos pyramidalis circumferentia, altitudo vero perpendicularis (B O) à vertice in latus baſeos deducta.

1. Pars. Ducantur ad contactus G K M rectæ B G, B K, B M. Erunt hæ recti coni latera, ac proinde æquales. Et quia axis BA *a* rectus eſt baſis plano FKD, etiam planum *b* G B A plano F K D rectum erit. Atqui H G perpendicularis *c* eſt ad AG communem ſectionem planorum FKD & GBA. Ergo H G etiam *d* recta eſt plano G B A. ac proinde perpendicularis quoque eſt ad *e* ipſam B G. Ergo B G latus coni, eſt altitudo trianguli F B H. Eodem modo latus coni erit altitudo reliquorum HBL, LBD &c. Igitur triangulum circumferentiâ FH L D, & latere coni comprehenſum, æquatur ſuperficiei pyramidis circumſcriptæ abſque baſi. Quod erat primum.

a *Per hyp.* b *Per 18. l. 11.* c *Per 18. l. 3.* d *Collig. ex def. 4. l. 11.* e *Per defin. 3. l. 11.*

2. Partis ſimilis ferè demonſtratio eſt.

PRO-

PROPOSITIO X.

SVperficies priſmatis ordinati cylindro recto circumſcripti deſinit a in cylindri ſuperficiem : & pyramidis cono recto circumſcriptæ ſuperficies in coni ſuperficiem deſinit.

a Deſin. 6. l. 12.

Fig. 3. & 4.

1. Pars. Priſmatum ordinatorum cylindro ſine fine conſcriptorum & inſcriptorum ſuperficies habebunt tandem inter ſe differentiam datâ minorem, uti facile patebit ex 8 & 3 huius. Multò igitur magis, ſuperficies circumſcripti priſmatis à ſuperficie cylindri inter inſcriptam, & circumſcriptam mediâ, differet differentiâ minori quâcunque datâ, hoc eſt, b deſinet in cylindricam ſuperficiem, minùs ſemper ac minùs ex cedendo.

b Deſin. 6. l. 12.

2. Pars. Eodem modo oſtenditur ex 9. & 3 huius.

In figuris tantum exhibentur cylindri & coni ſemiſſes, ne multitudo linearum confuſionem pareret. Cæterum cogitandi ſunt cylindrus & conus integri, quos priſmata & pyramides circumſcriptæ ambiunt. Sic enim clariùs apparet planas ſuperficies circumſcriptas eſſe maiores ex 3. axiomate.

Lem-

Lemma ad ſequen.

Sint A B, C D, E F proportionales, ſitque K B dimidia A B, & E G dupla E F; etiam K B, C D, E G proportionales erunt. Fig. 7.

Recta K B eſt ad A B, ut E F ad E G. Rectangulum ergo K B, E G æquatur per 16. l. 6. rectangulo AB, EF. Sed hoc per 17. l. 6. æquatur quadrato CD, Ergo & rectangulum K B, E G par eſt quadrato C D. Ergo per 17. l. 6. KB, C D, E G, ſunt proportionales.

PROPOSITIO XI.

Circulus, cujus radius (GH) eſt medius proportionalis inter recti cylindri latus (BC) & baſeos diametrum (BD,) æqualis eſt ſuperficiei cylindricæ. Fig. 5. & 6.

Intelligatur circulis A B N, G P N, circumſcripta eſſe ordinata polygona, adeoque ſimilia N M, R S, & ſuper N M polygono erectum eſſe priſma, cylindro circumſcriptum. Quoniam B D, G H, BC ex hyp. ſunt proportionales, etiam AD (ſeu AN) *o* GH & dupla B C *o* proportionales erunt. o Per lem. Iam triangulum ſub A N & ambitu polygoni MN contentum *a* æquatur polygono conſcripto N M: rectangulum verò ſub a Per 4. hujus.

BC

B C ſeu E F & eodem ambitu N M (hoc eſt *b* triangulum ſub ambitu N M & dupla B C) æquale eſt *c* ſuperficiei priſmatis cylindro conſcripti. Atqui triangulum ſub ambitu N M & A N, eſt ad triangulum ſub ambitu N M & dupla B C *o* ut A N ad duplam B C. Ergo etiam polygonum N M eſt ad ſuperficiem priſmatis cylindro conſcripti ut A N ad duplam BC. Sed quia jam oſtendi A N, G H, duplam B C, eſſe proportionales, ratio AN ad duplam B C eſt duplicata *d* rationis A N ad G H. Ergo polygonum N M ad ſuperficiem priſmatis rationem habet duplicatam rationis A N ad G H. Sed etiam polygonum N M ad ſimile ſibi polygonum G R Q S, rationem habet duplicatam rationis A N ad G H, ut facilè colligitur ex 1. lib. 12. Ergo polygonum N M ad ſuperficiem priſmatis, & ad polygonum G R Q S eandem habet rationem; quæ proinde æqualia *e* ſunt. Eodem modo oſtendam, priſmaticas ſuperficies cylindro in infinitum circumſcriptibiles ſemper æquales eſſe polygonis, quæ circulo G P H, in infinitum circumſcribi poſſunt. Quare cum & ſuperficies priſmaticæ *f* in cylindri ſuperficiem & polygona *i* in circulum G P H deſinant, etiam cylindri ſuperficies circulo G P H æqualis *k* erit. Quod erat demonſt.

b *Patet ex* 41. *l.* 1.
c *Per* 8. *hujus.*
o *Per* 1. *l.* 6.
d *Per defin.* 10. *l.* 5.
e *Per* 9. *l.* 5.
f *Per* 10. *hujus.*
i *Per* 3. *hujus.*
k *Per* 1. *hujus.*

Ex

Ex egregio hoc theoremate exhibetur circulus æqualis ſuperficiei cylindricæ.

Corollaria.

1. *Superficies cylindri recti, æqualis eſt rectangulo ſub latere BC, & baſeos peripheria contento.* Fig. 5. & 6

Dupla B C (ut oſtenſum ſupra) eſt ad G H, ut G H ad BA, ſeu AN; Hoc eſt, ut *n* peripheria P ad peripheriam BN. Ergo triangulum ſub primâ, nempè duplâ BC, & quartâ, nempè peripheriâ B N æquatur *p* triangulo ſub ſecundâ, G H, & tertiâ, peripheriâ ſcilicet P. Sed triangulum ſub G H & peripheriâ P, æquale *q* eſt circulo G P H, hoc eſt, *r* ſuperficiei cylindricæ. Ergo etiam triangulum ſub dupla B C & peripheriâ B N (hoc eſt *s* rectangulum ſub BC & peripheria BN) cylindricæ ſuperficiei æquale erit. Quod erat demonſt.

n *Per 7. hujus.*
p *Patet ex 16. l. 6.*
q *Per 5. hujus.*
r *Per 11. hujus.*
s *Patet ex 41. l. 1.*

Ex hoc corollario manifeſtum eſt rectangulorum proprietates, ſuperficiebus cylindricis rectis eſſe communes. Eſto igitur corollarium.

2. Cylindricæ ſuperficies (BM, QN) æquè altæ, ſunt inter ſe ut baſium diametri (BF, QR.) *Fig. 20. & 21. l. 12. tab. 5.*

Nam rectangula ſub peripheriis CL, SE,

S E,& rectis æqualibus F M,R N compre-henſa, quibus cylindricæ ſuperficies *d* ſunt æquales,ſunt inter ſe *e* ut baſes peripheriæ videlicet C L, S E ; hoc eſt *f* ut diametri B F, Q R.

d Per coroll. 1.
e Per 1. l. 6.
f Per 7. huius.

Fig. 23. & 24. l. 12. tab. 6.

3. Cylindricæ ſuperficies(C I,A R)quæ baſes habent æquales, ſunt inter ſe ut altitudines (T I, B R.)

Rectangula enim ſub æqualibus per hyp. peripheriis G H,M Q,& lateribus T I,B R contenta, quibus ſuperficies *g* cylindricæ ſunt æquales, ſunt inter *i* ſe ut T I,B R.

h Per. coroll. 1.
i Per 1. l. 6.

Fig. 20. & 21. l. 12. tab. 5.

4. Similes cylindricæ ſuperficies (B M, R I) rationem habent duplicatam eius, quam habent baſium diametri(B F,Q R.)

Cum cylindri ponantur ſimiles.erit M F ad I Q, *o* ut B F ad Q R, hoc eſt *k* ut peripheria C L ad peripheriam S E.Quare etiam rectangula ſub peripheris C L, S E,& lateribus M F,I Q,contenta,ſimilia erunt, ac proinde rationem inter ſe habebunt *l* duplicatam eius , quam habet M F ad I Q, hoc eſt B F ad Q R. Ergo & cylindricæ ſuperficies &c.

o Defin. 4. l. 12.
k Per 7. huius.
l Per 20. l. 6.

Fig. eadem.

5. Cylindricæ ſuperficies (B M,R I) rationem inter ſe habent compoſitam ex rationibus laterum (F M, I Q) & diametrorum (B F, Q R) quæ ſunt in baſibus.

Fig. 24. & 25. l. 12. tab. 6.

6. Si æquales ſunt cylindricæ ſuperficies (A R, F D) erit ut diameter A B, ad diametrum

metrum F N, ita reciprocè altitudo FH ad altitudinem R B: & è converſo.

7. Denique ex eodem 1. corol. habetur cylindricæ ſuperficiei dimenſio, ſi nimirum altitudo ducatur in baſeos peripheriam, ut ſi altitudo ſit pedum 20, peripheria baſis pedum 6; multiplica 20 per 6, proveniunt 120 pedes quadrati pro cylindrica ſuperficie.

PROPOSITIO XII.

Cylindri recti ſuperficies eſt ad baſim (A B N) ut cylindri latus (C B) ad (B O) quartam partem diametri baſeos. *Fig. 6. & 5. tab 6. Archim.*

Sit G H media proportionalis inter B C & B D diametrum baſis, ac proinde etiam media *a* proportionalis inter BA ſeu AN, & duplam B C. Circulus G P H radii G H æquatur curvæ ſuperficiei *b* cylindricæ CD. Sed circulus G P H ad cylindri baſim ABN, rationem habet duplicatam *c* rationis GH ad AN: hoc eſt *d* eandem quam dupla B C ad B A radium, hoc eſt eandem quam BC ad BO quartam diametri partem. Ergo etiam ſuperficies cylindrica eſt ad baſim ABN, ut B C ad B O quartam partem diametri B D. Quod erat demonſtrandum.

a Per lem. ante p. 11. hujus.
b Per 11. hujus.
c Per 2. l 12.
d Per hyp. & defin. 10. l. 5.

Corol-

Corollarium.

SUperficies cylindri habentis latus diametro baſis æquale, baſeos quadrupla eſt. Si verò latus fuerit quarta pars diametri baſeos, ſuperficies cylindri baſi æqualis erit. Utrumque ex propoſitione manifeſtum eſt.

PROPOSITIO XIII.

Fig. 9. & 8. *CIrculus, cujus radius (O L) eſt medius proportionalis inter coni recti latus (B C) & baſis radium (A C,) æqualis eſt ſuperficiei conicæ.*

Intelligantur circulis A C G O P L, circumſcripta eſſe polygona ordinata E F, I N, & ſuper polygono E F erectam eſſe pyramidem cono circumſcriptam.

Quoniam per hyp. A C ſeu A G eſt ad O L, ut O L ad B C, erit ratio A G ad B C duplicata *a* rationis A G ad O L. Sed ut A G ad B C ita triangulum ſub A G & ambitu E F eſt ad triangulum ſub B C & eodem ambitu E F. Ergo ratio trianguli ſub A G, & ambitu E F ad triangulum ſub B C & eodem ambitu eſt etiam duplicata rationis A G ad O L. Sed triangulum ſub A G & ambitu E F æquale eſt *b* polygono E F, & triangulum ſub B C & eodem ambitu E F æquale *c* eſt ſuperficiei pyramidis circumſcriptæ;

a *Defin.* 10. *l.* 5.

b *Per* 4. *hujus.*

c *Per* 9. *hujus.*

ſcriptæ. Ergo ratio polygoni E F ad ſuperficiem pyramidis etiam eſt duplicata rationis A G ad O L. Atqui etiam ratio polygoni E F ad polygonum ſibi per conſtr. ſimile I N eſt duplicata *d* rationis A G ad O L. *d Per 1. l. 12.* Ergo polygonum E F, ad ſuperficiem pyramidis & ad polygonum I N eandem habet rationem, quæ proinde æqualia *e* erunt. *e Per 9. l. 5.* Eodem modo oſtendam ſuperficies pyramidum, quæ cono in infinitum magis magiſque polygonæ circumſcribi poſſunt, ſemper æquales eſſe polygonis quæ circulo O P L poſſunt circumſcribi etiam in infinitum. Quare, cum & pyramidum *f* ſuperficies in coni ſuperficiem, & polygona in circulum *i* OPL tandem deſinant, etiam coni *k* ſuperficies & circulus O P L erunt æqualia. Quod erat Demonſt. *f Per 10. hujus. i Per 5. hujus. k Per 1. hujus.*

Ex hoc præclaro theoremate exhibetur circulus ſuperficiei conicæ æqualis.

Corollaria.

1. R*Ecti coni ſuperficies æqualis eſt triangulo, ſub coni latere (B C) & baſeos peripheria (C G) comprehenſo.* *Fig 8. & 9.*

Sit O L radius media proportionalis inter A C & B C. Quia peripheria C G eſt ad peripheriam P ut *a* radius A G ad radium O L; hoc eſt per hyp. ut O L ad B C: erit triangulum ſub prima, nempè peripheriâ C G & *a Per 7. hujus.*

b *Patet ex 16. l. 6.* ſub quarta B C *b* æquale triangulo ſub ſecunda, nempè peripheriâ P, & tertiâ OL; hoc eſt *o* circulo OPL, hoc eſt *d* ſuperficiei conicæ BCD. Quod erat Demonſt.

o *Per 5. hujus.*

d *Per hanc 13.*

Ex hoc corollario liquet ſuperficies conicas triangulorum ſubire leges. Itaque

Fig. 20. & 21. l. 12. tab. 5. 2. Superficies conicæ B A F, Q X R æqualia latera BA, QX, habentes, ſunt inter ſe, ut baſium diametri B F, Q R.

Fig 32. & 24. l. 12. tab. 6. 3. Et (C F T, AZB) quæ baſes habent æquales, ſunt inter ſe ut latera (C F, AZ.)

Fig. 20. & 21. l. 12 tab. 5. 4. Et quæ ſimiles ſunt (B A F, Q Z R) duplicatam habent rationem ejus, quæ eſt inter baſium diametros

Fig. ead. 5. Et quælibet, rationem inter ſe habent compoſitam ex rationibus laterum (BA, QZ) & diametrorum (BF, QR) quæ ſunt in baſibus.

6. Et quæ æquales ſunt reciprocant latera & baſium diametros; & quæ reciprocant, ſunt æquales.

Quæ omnia demonſtrantur ex coroll. 1. ut ſupra corollaria de cylindrica ſuperficie deduximus ex corollario iſthic primo.

Fig. 25. l. 12. tab. 6. 7. Metiemur denique conicam ſuperficiem, ſi latus FC per baſeos peripheriam dimidiam multiplicemus. Ut ſi latus ſit pedum 5, peripheria baſeos pedum 20, duc 5. per 10, proveniunt 50. pedes quadrati pro conica ſuperficie. Dem. patet ex eodem 1. coroll.

PRO-

PROPOSITIO XIV.

Coni recti ſuperficies eſt ad baſim, ut latus (B C) ad baſis radium (A C.) Fig. 8. & 9. Archim. tab. 6.

Inter latus B C & baſis radium A C, ſit media proportionalis O L. Ergo ratio B C ad A C eſt duplicata *e* rationis O L ad A C Iam circulus radii, O L *f* eſt æqualis ſuperficiei conicæ C B D. Sed hujus ratio ad coni baſim A C G eſt duplicata *g* rationis O L ad A C, ac proinde eadem cum ratione B C ad A C. Ergo etiam ratio ſuperficiei conicæ C B D eſt ad baſim ACG, ut B C ad A C. Quod erat demonſt.

e Defin. 10. l. 5.
f Per 13. hujus
g Per 2. l. 12.

Corollaria.

1. *Superficies coni recti à triangulo æquilatero circa perpendicularem K A, circumacto geniti, baſeos Q T dupla eſt.* Fig. 27.

Eſt enim K B latus æquale B D, adeoque duplum ſemiſſeos A B, quæ baſeos radius eſt.

2. *Superficies coni à rectangulo triangulo æqui cruri E B D producta eſt ad baſim, ut in quadrato diameter ad latus.* Fig. 24.

a Patet ex 26. l. 1.
b Per coroll. 1. p. 32. l. 1.
c Per 6. l. 1.

Ducta enim perpendiculari B A, *a* angulus rectus B biſecatur, adeoque A B D ſemirectus eſt, eſt autem & A D B *b* ſemirectus. Ergo D A, B A *c* æquales ſunt ac proinde B D eſt diameter quadrati A K latus verò A D. Eſt verò eadem A D ſemidiameter baſeos P T, cum perpendicularis A B, ſecet *d* bifariam E D. Ex quibus & hac 14. patet corollarium.

d Patet ex 26. l. 1.

Fig. 24.

3. *Superficies cylindri recti (G K) eſt ad ſuperficiem coni recti (G B N,) ut cylindri latus ad dimidium latus coni.*

Nam ſuperficies coni G B N eſt ad baſim M I, ut latus B N ad *e* ſemidiametrum baſis Q N; hoc eſt ut dimidium lateris B N ad quartam partem diametri G N. Eſt autem baſis M I ad ſuperficiem cylindri G K, ut *i* quarta pars diametri ad N K cylindri latus. Ex æquo igitur ſuperficies conica G B N eſt ad ſuperficiem cylindricam G K, ut dimidium latus coni ad cylindri latus N K. Quod erat demonſtr.

e Per 14. huius.
i Per 22. huius.

Lemma ad ſequen.

Fig. 10.

IN triangulo N P V ducta ſit Q D parallela ad N V.

Dico rectangulum ſub P N & N V, æquari rectangulo ſub P Q, Q D, una cum rectangulo ſub N Q & duabus ſimul ſumtis N V, Q D.

Duc

Duc lateri N P perpendicularem N A æqualem N V, completoque N O rectangulo, ducatur diameter P A. Tum ex Q parallela Q E ad N A ſecet P A in B. Per B ducatur C F parallela ad N P. Quoniam A N eſt par N V; patet etiam *a* Q B eſſe parem Q D. Igitur rectangulum O N eſt rectang. P N V, & F Q eſt P Q D. Reſtat ut probemus rectangula O B, E C, B N æquari rectangulo ſub N Q & duabus N A, Q B, hoc eſt ſub N Q & duabus N V, Q D. Id verò eſt manifeſtum: rectangulum enim ſub N Q & N A, Q B, æquatur *b* his tribus rectangulis ſub N Q & C A (hoc eſt ſpacio E C) ſub N Q, & N C (hoc eſt ſpacio B N) ſub N Q & Q B: hoc eſt rurſum ſpacio B N, ac proinde ſpacio O B quod ipſi B N *c* æquale eſt. Liquet ergo propoſitum.

a Ex corol. 1. p. 4. l. 6. & ex 11. l. 5.

b Per 1. l. 2.

c Per 43. l. 1.

PROPOSITIO XV.

Fig. 11. & 12.

S*I conus rectus ſectus ſit plano Q S R baſi N Z O parallelo; Dico circulum G H M, cujus radius G H eſt medius inter partem lateris N Q & circulorum Q S R, N Z O, radios Q D, N V ſimul ſumptos, æqualem eſſe ſuperficiei conicæ inter parallelos circulos Q S R, N Z O interceptæ.*

Inter P N & N V media ſit G F. Item inter P Q & Q D ſit media G K, deſcribanturque circuli G F L, G K T. Erit hic *b* æqualis ſuperficiei conicæ Q P R, ille ſuperficiei *c* N P O. Rectangulum P N V æquatur *d* rectangulo P Q D, una cum rectangulo ſub N Q & N V, Q D ſimul ſumtis. Sed quia *e* G F media eſt proportionalis inter P N, N V, rectang. P N V eſt æquale *f* quadrato G F, & quia G K eſt *i* media inter P Q, Q D, rectang. *l* P Q D æquatur quadrato G K: & quia G H media *k* eſt inter Q N, & Q D, N V ſimul ſumtas, rectangulum ſub Q N & Q D, N V ſimul ſumtis, æquale eſt *n* quadrato G H. Ergo quad. G F par quoque eſt quadratis G H, G K. Ergo cum circuli ſint inter ſe ut *o* quadrata radiorum, erit quoque circulus G L F æqualis duobus circulis, G K T & G H M. Atqui circulus G L F eſt æqualis *p* ſuperficiei conicæ N P O. Ergo etiam ſuperficies conica N P O æquatur duobus circulis G K T & G H M. Atqui ſuperficiei N P O pars una Q P R *r* æqualis eſt circulo G K T. Ergo reliqua, inter parallelos circulos Z Z, S S comprehenſa, æquatur circulo G H M. Quod erat demonſtrandum.

b *Per* 13. *hujus.*
c *Per eand.*
d *Per lem.*
e *Per conſtr.*
f *Per* 17. *l.* 6.
i *Per conſtr.*
l *Per* 17. *l.* 6.
k *Per hyp.*
n *Per* 17. *l.* 6.
o *Per* 2. *l.* 12.
p *Per* 13. *hujus.*
r *Per eand.*

Lem-

Lemma ad ſequent.

R*ecta (BH,C G) quæ in circulo æqaules arcus (B C, H G) intercipiunt, ſunt parallelæ.* *Fig. 13.*

Ducatur enim CH. Qnoniam arcus BC, H G per hyp. ſunt æquales etiam *a* anguli BHC,G C H alterni æquales erunt. Ergo *b* B H & C G ſunt parallelæ. Quod erat demonſtrandum.

a Per 29. l. 3.
b Per 28. l. 1.

PROPOSITIO XVI.

I*N ſcribatur circulo figura regularis, parilatera et æquilatera; Ducaturque E B ab extremitate diametri ad B, terminum lateris diametro proximi, angulos verò æqualiter diſtantes ab A, jungant recta B H, C G, D F.* *Fig. 13.*

Dico rectangulum quod diametro A E, et ſubtenſâ E B continetur, æquari rectangulo, quod fit ex latere uno figuræ inſcriptæ (A B, vel B C &c,) & ex omnibus iungentibus B H, C G, D F ſimul ſumtis.

Duc CH, D G: quoniã BH, C G, DF intercipiunt arcus *a* æquales BC, H G; C D, GE; erũt *b* parallelæ. Pari argumẽto paralle-

a Per 26. l. 3
b Per lem. prec.

læ ſunt B A, CH, D G, E F. Omnia igitur
c Per 27. & 15. l. 1. triangula *c* B A K, K H L, L C M, M G N, N D O, O F E æquiangula ſunt. Ergo *d* ut
d Per 4. l. 6 B K ad K A, ſic H K ad K L; & ut H K ad K L, ſic C M ad M L; & ut C M ad M L, ſic G M ad M N; & ut G M ad M N, ſic D O ad O N; & ut D O ad O N, ſic F O
e Per 12. l. 5. ad O E. Ergo *e* ut una antecedentium B K ad unam conſequentium K A; ſic omnes antecedentes B K, K H, C M, M G, D O, O F; (hoc eſt omnes jungentes B H, C G, D F) ſunt ad omnes conſequentes A K, K L,
i Per 8. l. 6. L M, M N, N O, O E, hoc eſt ad diametrum A E. Sed ut B K ad *i* A K ſic E B ad B A. Ergo ut omnes ſimul B H, C G, D F
k Per 16. l. 6. ad A E, ſic E B eſt ad B A. Ergo *k* rectangulum ſub omnibus jungentibus B H, C G. D F, & ſub B A æquatur rectangulo ſub A E & E B. Quod erat demonſtr.

PROPOSITIO XVII.

Fig. 14. *Segmento circuli D A F, cujus baſis D F perpendicularis ſit diametro A O E, inſcribatur figura æquilatera & parilatera, ducaturque ut in præcedenti recta E B.*

Dico rectangulum ſub E B & parte diametri A O, quæ ſegmenti axis eſt, com-

comprehenſum, æquari rectangulo ſub latere uno figuræ inſcriptæ, et omnibus jungentibus B,H, CG una cum D O dimidio baſis D F ſimul ſumtis comprehenſo.

Demonſtratio eadem quæ præcedentis.

Lemma 1. *ad ſequent.*

INſcriptâ ſit ſphæræ maximo circulo figura regularis, cujus latera quaternarius metiatur, circa axem A E conſiſtens: Quo manente, circulus cum figura circumagatur. Fig. 13.

Dico ſphæræ inſcriptum iri corpus conicis rectis ſuperficiebus, contentum.

Quod B A, HA, item D E, F E deſcribant integras conorum rectorum ſuperficies manifeſtum *o* eſt. Deinde quia lineæ C B, GH, & G F, CD concurrunt productæ in eodem utrimque puncto diametri A E ſimiliter per tractæ, quæ jungentes ſecat normaliter: etiam liquet has deſcribere partes ſuperficierum rectarum conicarum, interceptas inter parallelos circulos, quos in ſphærica ſuperficie deſcribunt vertices angulorum B,C,D. *o Vide defin. 2. l. 11.*

Lemma. 2.

SEgmenti ſphæræ, cujus axis AO, ſectio maxima eſto D A F. Huic inſcripta ſit figura æquilatera demâ baſi, quæ circa axem A O in orbem convertatur. Fig. 14.

Dico

Dico ſegmento ſphærico inſcriptum iri corpus conicis ſuperficiebus contentum.

Probatur ut lemma præced.

PROPOSITIO XVIII.

Fig. 13. *Ponantur eadem quæ in primo lemmate. Et ducatur recta E B, ab extremitate diametri ad terminum lateris diametro proximi.*

Dico omnibus ſuperficiebus conicis ſphæræ inſcriptis æqualem eſſe circulum, cujus radius (L) poteſt a *rectangulum A E B, comprehenſum videlicet, ſub diametro A E, & ſubtenſâ E B.*

a Potentia recta eſt quadratum ejus.

b Per 17. l. 6. Hoc eſt, *b* cujus radius (I) eſt medius proportionalis inter A E & E B.

Quoniam rectæ B H, C G, D F æquantur rectis B K, C M, D O bis ſumtis, erit *c* rectangulum ſub latere uno figuræ inſcriptæ maximo circulo (videlicet ſub AB, vel B C, vel C D, vel D E) & ſub omnibus ſimul jungentibus B H, C G, D F æquale rectangulo ſub A B & B K, ſub B C & comſipotâ ex B K & C M, ſub C D & compoſitâ ex C M & D O, ſub D E & D O; ſic enim rectæ B K, C M, D O ſingulæ fuerunt bis acceptæ. Atqui rectangulum ſub A B &

c Per 1. l. 2.

& omnibus jungentibus B H, CG, DF ſimul ſumtis æquatur *d* rectangulo A E B, hoc eſt *e* quadrato I. Ergo quadratum I æquale eſt rectangulis ſub A B & B K, ſub B C & compoſitâ ex BK, CM, ſub CD & compoſitâ ex CM, DO, ſub D E & D O. Sint jam inter AB & BK media proportionalis P; inter B C & compoſitam ex BK, C M media Q; inter C D & compoſitam ex C M, D O, media R; inter D E & DO media S. Erunt igitur quadrata P, Q, R, S æqualia *f* rectangulis ſupradictis. Quare cum quadratum I jam oſtenderim iiſdem æquari rectangulis, etiam quadratis P, Q, R, S æquale erit. Cum igitur circuli ſint inter ſe *g* ut quadrata radiorum, etiam circulus radio I deſcriptus omnibus ſimul circulis quorum radii, P, Q, R, S æqualis *i* erit. Atqui circuli radiorum, P, & S, æquantur *k* ſuperficiebus conicis, quas produxerunt latera AB, E D, ſiquidem P eſt media proportionalis inter AB coni latus, & BK radium baſeos; S verò media eſt inter E D, & D O; circulus radii Q eſt æqualis ſegmento *n* ſuperficiei conicæ quæ intercipitur inter duos parallelos circulos diametrorum C G, B H, quia Q media eſt inter B C, & compoſitam ex B K, C M; & ob eandem cauſam circulus radii R æquatur ſegmento ſuperficiei conicæ inter parallelos

d *Per* 16. *hujus.*
e *Per hyp.*
f *Per* 17. *l.* 6
g *Per* 2. *l.* 12.
i *Patet ex* 22. *l.* 6. & 24. *l.* 5.
k *Per* 13. *hujus.*
n *Per* 15. *hujus.*

los circulos diametrorum C G, D F interceptæ. Ergo circulus radio I deſcriptus, æquatur omnibus ſimul conicis ſuperficiebus ſphæræ inſcriptis. Quod erat demonſtr.

PROPOSITIO XIX.

Fig. 14.

Ponantur eadem quæ in 2. lemmate. & ducatur recta E B ab extremitate diametri A E ad terminum lateris A B diametro proximi.

Dico omnibus ſuperficiebus conicis ſegmento ſpharico D A F inſcriptis æqualem eſſe circulum, cujus radius eſt medius proportionalis inter E B, & ſegmenti axem A O.

Demonſtratio planè eadem, quæ præcedentis: ſed pro P. 16. citetur P. 17.

PROPOSITIO XX.

Fig. 15.

Superficies conicæ ſphæræ inſcriptæ, in ſphæræ ſuperficiem deſinunt.

Data ſit ſuperficies quantumvis parva X. manifeſtum eſt intra ſphæricam ſuperficiē A C E G dari aliam poſſe concentricam, quæ ab hac deficiat quantitate minori quā ſit X. Ambarum plano ſectarum per centrum

trum maximi circuli ſint ACEG, DPLM. Ducatur diameter A D E, & in D tangat N Q. Si arcus A E biſecetur in C, & reſiduum biſecetur rurſus & ſic deinceps, relinquetur *a* tandem arcus AB minor arcu A N. huic ſi ſubtendatur recta A B, manifeſtum eſt eam non pertingere ad peripheriam P D M L, eſſeque latus figuræ æquilateræ & parilateræ circulo C A G E inſcriptæ, cujus nullum latus pertingat ad peripheriam P D M E. Quare ſi circa diametrum A E in orbem agantur omnia, patet ſuperficiei ſphæricæ exteriori inſcribendas eſſe conicas ſuperficies, quæ includant ſuperficiem ſphæricam alteri concentricam, ac proinde illâ ſint *b* majores. Quoniam igitur ſphærica ſuperficies D P L M, deficit à ſuperficie ſphæricâ ACEG quantitate minori quam ſit data X; multò magis ſuperficies conicæ ab eadem ſphæricâ A C E G, deficient quantitate minori quā ſit data X, ac proinde *c* in A C E G ſuperficiem deſinent. Quod erat demonſtrandum.

a Patet ex lem. 2. ſchol. poſt 11. l. 6.

b Per axiom. 3. hujus.

c Defin. 6. l. 12.

PROPOSITIO XXI.

Fig. 17.

C*Onicæ ſuperficies ſegmento ſphærico D A F, inſcriptæ in ipſam ſegmenti ſphæricam ſuperficiem deſinunt.*

Demonſtrabitur eodem ferè ratiocinio quo præcedens.

PRO-

PROPOSITIO XXII.

Fig. 16.

DEmonſtratum eſt propoſ. 18, circulum cujus radius eſt medius proportionalis inter diametrum A E, & rectam E B, quæ ab extremitate diametri ducitur ad terminum lateris A B diametro proximi, æqualem eſſe omnibus ſuperficiebus conicis ſphæræ inſcriptis.

o Vide defin. 6. l. 12.

Dico hunc circulum deſinere o *tandem in circulum, cujus radius eſt A E ſphæræ diameter.*

Nam ſi plura ſemper ac plura in infinitum latera circulo maximo inſcribantur, (quæ deinde circa A E in orbem acta conicas producunt ſuperficies) patet latus AB fieri tandem quavis datâ rectâ minùs, ac proinde ſubtenſam E B, ad diametrum AE accedere ad intervallum etiam quovis dato minus; unde fit ut differentia ipſarum A E, B E etiam fiat quâvis datâ minor. Ergo multo magis media proportionalis inter A E, BE, quæ ſemper major eſt quam BE, differet ab AE tandem defectu minori quocunque dato. Ergo etiam circulus cujus ſemidiameter eſt media inter A E, & B E, à circulo, cujus radius eſt A E, tandem differet

ret defectu minori, quocunque dato: hoc eſt in *i* ipſum deſinet. Quod erat dem.

Hæc per ſe ſatis clara, non eſt neceſſe operoſiùs demonſtrare. i *Defin. 6. l. 12.*

PROPOSITIO XXIII.

Demonſtratum eſt propoſ. 19. circulum, cujus radius eſt medius proportionalis inter E B & A O ſegmenti axem, æqualem eſſe omnibus ſuperficiebus conicis portioni ſphæricæ D A F inſcriptis. *Fig. 17.*

Dico hunc circulum deſinere in circulum, cujus radius eſt recta A D, à ſegmenti vertice ducta ad peripheriam circuli D Q F N, qui baſis eſt ſegmenti.

Nam quia jam ex præced. demonſt. liquet E B deſinere tandem in A E, patebit quoque mediam proportionalem inter E B & A O, deſinere tandem in mediam proportionalem inter A E & A O; hoc *n* eſt in ipſam A D. Manifeſtum eſt igitur & circulum cujus radius eſt medius proportionalis inter E B & A O etiam deſinere in circulum radii A D. Quod erat demonſtrandum. n *Per coroll. 2. p. 8. l. 6.*

Lem-

Lemma ad ſequens.

SI diameter diametri dupla eſt, circulus Circuli, quadruplus erit.

Patet ex propoſ. 2. l. 12. & defin. 16, lib. 5.

PROPOSITIO XXIV.

Fig. 16. *CUiuſcunque ſphæræ ſuperficies quadrupla eſt maximi circuli ejuſdem ſphæræ.*

HOc nobiliſſimum Archimedis theorema ex jam præmiſſis expeditè demonſtrabimus hunc in modum.

Circulo ſphæræ maximo circa diametrum A E intelligatur inſcripta eſſe figura ordinata, cujus latera quaternarius metiatur. Quæ circa AE in orbem ducta, producat conicas ſuperficies, ſuperficiei ſphæricæ inſcriptas, ducaturque EB. Demonſtratum jam ſupra *a* eſt, omnes conicas ſuperficies ſphæræ inſcriptas æquales eſſe circulo, cujus radius poteſt rectangulum AEB, hoc eſt cujus radius eſt medius proportionalis inter AE, & EB. Atque hoc ſemper evenit inſcriptionibus in infinitum continuatis. Quare cum inſcriptæ conicæ ſuperficies *b* tandem deſinant in ſphæricam ſuperficiem, circulus verò cujus radius eſt medius inter AE, & EB, deſinat *c* in circulũ, cujus radius

a 18. *hujus.*

b Per 20. *hujus.*

c Per 22. *hujus.*

AE,

A E, ipſa quoque ſphærica ſuperficies *d* æqualis erit circulo radii A E, hoc eſt *e* quadruplo maximi circuli A C E G. Quod erat demonſtrandum.

d *Per 2. hujus.*
e *Per lem. præced.*

Viam, quâ in theoremate nobiliſſimo demonſtrando hactenus uſi ſumus, Archimedæâ multò breviorem & clariorem eſſe ſciet, qui Archimedem legerit.

Corollarium.

EX hoc præclaro, atque admirabili theoremate, quo immortale nomen Archimedes apud omnes Geometras conſecutus eſt, exhibetur circulus æqualis ſuperficiei ſphæricæ, is nimirum cujus ſemidiameter eſt ſphæræ diameter, ſive cujus diameter dupla eſt diametri ſphæræ.

Scholium.

Expedita jam erit dimenſio ſuperficiei ſphæricæ, principis inter omnes curvas. Duplex eſt modus.

1. *Menſuretur circulus ſphæræ maximus (ut traditur in ſcholio poſt P. 6. hujus.) Et multiplicetur per 4. Ut ſi maximus orbis terræ circulus inventus ſit continere quadrata milliaria unius horæ ſive Belgica 5, 940, 000, hic numerus quadruplicatus exhibet quadrata milliaria Belgica, 23, 760, 000, quæ in ſuperficie orbis terræ continentur.*

2. Diameter ſphæræ multiplicata per circumferentiam maximi circuli exhibet ſphæræ ſuperficiem. Ut ſi terræ diametro dentur milliaria unius horæ 2750 $\frac{14}{17}$ atque inde maximi circuli circumferentia eliciatur milliariorum 8640; *hi duo numeri rurſum quadrata milliaria unius horæ* ,23, 760, 000 *totam orbis terræ ſuperficiem conſtituentia.*

Demonſtratio patet ex primo corol. p. 5. hujus; rectangulum enim ſub diametro ſphæræ, & maximi circuli circumferentiâ, per dictum corol. eſt quadruplum maximi circuli.

PROPOSITIO XXV.

Fig. 17. *CUjuſcunque portionis ſphæricæ (DAF) ſuperficies æqualis eſt circulo, cujus radius eſt recta (AD) à vertice portionis ducta ad circumferentiam circuli (DQFN) qui portionis eſt baſis.*

Portionis maximæ ſectioni inſcripta cogitetur circa axem A O figura æquilatera & parilatera baſi demtâ; quæ, circa A O in orbem acta, portioni inſcribet conicas ſuperficies. Ducatur quoque recta E B, ut
o In 18. & 19. hujus. o ſupra. Oomnes conicæ ſuperficies ſegmento ſphærico jam inſcriptæ æquantur *a* circulo
a Per 19. hujus. cujus radius eſt medius proportionalis inter E B, & ſegmenti axem A O. Atque hoc multiplicatis in infinitum inſcriptionibus

bus ſemper continget. Quare cum & conicæ ſuperficies ſegmento inſcriptæ, deſinant *b* in ſphæricam ſegmenti ſuperficiem, & circulus cujus radius inter E B & AO medius eſt, deſinat *c* in circulum radii AD; etiam *d* ſphærica portionis ſuperficies DAF, circulo radii A D æqualis erit. Quod erat demonſtrandum.

b *Per 21. hujus.*
c *Per 23. hujus.*
d *Per 2 hujus.*

Hoc alterum eſt ex Archimedis inventis nobilioribus, quod perinde ac præcedens, viâ multo, quam ipſe, breviori ac clariori jam demonſtravimus.

PROPOSITIO XXVI.

Cylindri recti ſphæræ circumſcripti (HPSV) ſuperficies, æqualis eſt ſuperficiei ſphæræ. *Fig.* 18.

Et ſi cylindrus ac ſphæra ſecentur planis ad axem (B G) rectis, erunt ſingula ſuperficiei cylindricæ ſegmenta ſegmentis ſingulis ſuperficiei ſphæricæ æqualia.

1. Pars. Quoniam cylindri latus H P, æquale eſt *o* P S diametro baſis, erit cylindrica ſuperficies H S, quadrupla *a* baſeos, hoc eſt maximi circuli ſphæræ cylindro inſcriptæ; cujus cum etiam *b* quadrupla ſit ſphæræ ſuperficies, erit hæc æqualis cylindricæ. Quod erat demonſt.

o *Per hyp.*
a *Per coroll. p. 12. hujus.*
b *Per 24. hujus.*

X 2 2. Pars.

i Per 31. l. 3. 2. Pars. Ducantur rectæ B O, G O. Quoniam angulus B O G *i* rectus eſt in ſemicirculo, ab eoque cadit O C perpendicularis ad B G, erit *c* B O media proportionalis inter G B, & B C, hoc eſt inter I T & H I. Ergo circulus radii B O *d* æqualis eſt ſuperficiei cylindricæ H T. Sed idem circulus æqualis *e* eſt etiam ſegmento ſuperficiei ſphæricæ O B K. Æquales igitur ſunt ſuperficies, cylindrica H T, & ſphærica O B K.

c Per coroll. 2. p. 8. l. 6.
d Per 11. hujus.
e Per præc.

Deinde quia eodem modo oſtenditur cylindrica H X æquari ſphæricæ Q B R, etiam reliqua cylindrica I X, reliquæ ſphæricæ Q O K R, inter duos parallelos circulos interceptæ, æqualis erit.

Ex his patet de ſegmentis omnibus.

PROPOSITIO XXVII.

Fig. 18.

Segmenta ſuperficiei ſphæricæ parallelis circulis diviſæ eam inter ſe proportionem habent, quam ſegmenta diametri (*B C*, *C D*, *D A*, *A E*, *E F*, *F G*) *ad circulos parallelos recta.*

Sequitur ex præcedenti. Sunt enim ſphæricæ ſuperficiei ſegmenta O B K, Q O K R, M Q R N, &c. *a* æqualia cylindricis, H T, I X, L N &c, Atque hæc eandem

a Per præc.

dem inter ſe rationem habent, *b* quam axeos ſegmenta B C, C D, D A &c. Ergo & illæ. Quod erat demonſt. b Per 13. l. 12.

Scholium.

Ex hac innoteſcit proportio zonarum & elimatum inter ſe. Sunt enim ad invicem ut ſegmenta axis, quæ nota fiunt ex tabula ſinuum.

Ex eâdem habetur dimenſio ſegmentorum ſuperficiei ſphæricæ. Nam quia & tota ſphæræ ſuperficies nota eſt ex ſcholio prop. 24, & ſegmentorum proportio, utpote eadem quæ partium axis, etiam datur; liquet ſegmenta ſingula innoteſcere.

Cæterum & quatuor præcedentia theoremata, & reliqua omnia quæ ſequuntur, omnino ſingularia atque admiranda ſunt planeque digna, ad quæ intelligenda Geometriæ ſtudioſi ardenti ſtudio incumbant.

Lemma ad ſequent.

Si ſphæram tangat planum (Q N in O) recta (AO) ex centro ad contactum ducta eſt plano tangenti perpendicularis. Fig. 19.

Secentur planum tangens QN & ſphæra, per tactum O duobus planis, quæ in ſphæra quidem producant circulos O G, OD, in plano autem QM rectas C O, I O, quæ circulos contingent in O. Igitur per 18. l. 3. A O perpendicularis eſt ad utramque

 I O,

IO,C O, ac proinde per 4.l.11. recta plano QN. Quod erat demonſt.

PROPOSITIO XXVIII.

Fig. 20, 22. 21.

Omnis ſphæra æqualis eſt cono (ZO) cujus altitudo (KO) par eſt radio ſphæræ; baſis verò (Z) ſuperficiei ſphæræ æqualis.

Intelligatur ſphæræ circumſcriptum eſſe corpus aliquod poliëdrum, cujus ſolidi anguli novis planis ſphæram tangentibus abſcindantur. Quo facto orietur aliud corpus poliëdrum ſphæram continens, minùs priore, & pluribus conſtans angulis, & ſuperficiem habens ex pluribus ac minoribus planis tangẽtibus compoſitam. Si poliëdri hujus ſolidi anguli novis planis tangentibus iterum abſcindantur, & tertii poliëdri inde nati ſimiliter; atque ita in infinitum; fiet tandem ut & poliëdrum excedat ſphæram ſolido minori quocunque dato, & ſuperficies ejus ex planis tangentibus (quæ, ut dixi ſine termino & minora, & plura erunt) cõpoſita, ſphæricam ſuperficiem, excedat quoque plano minori, dato quocunque. Quod utrumque, licet demonſtrari poſſet, tamen quia per ſe ſatis clarum, poſtuletur ſtudio brevitatis. His ita conſtitutis, quæſitum ita concludemus.

Po-

Poliëdrum jam expoſitum componitur ex pyramidibus, quarum vertex communis eſt centrum ſphæræ, baſes vero ſunt plana tangentia, quæ poliëdri ſuperficiem conſtituunt. Et quia rectæ ex centro A ad ſingulorum planorum contactus ductæ, ad plana *a* ſingula perpendiculares ſunt, erunt omnium pyramidum, quibus conſtat poliëdrum, æqualis altitudo, ipſe nimirum AB radius ſphæræ. Si jam igitur planum, X, ponatur æquale ſuperficiei ipſius poliëdri, ſuperque eo erecta ſit pyramis ad altitudinem MN etiam æqualem ſphæræ radio AB, manifeſtum eſt *b* omnes pyramides ſupradictas, hoc eſt totum poliëdrum, æquari pyramidi XN. Ad eundem modum reliqua omnia poliëdra ſphæram includentia, quæ ex truncatione perpetuâ ſolidorum angulorum, alia atque alia naſcentur in infinitum, ſemper æqualia erunt pyramidibus (per XN repræſentatis) quarum altitudines (MN) ſunt radius ſphæræ, baſes vero (X) æquales ſuperficiebus poliëdrorum ſphæram ambientibus. Quare cum tandem, & poliëdra (ut dixi ſupra) in ſphæram, & pyramides XN (ut mox oſtendam) in conum ZO deſinant, etiam *c* ſphæra cono æqualis erit. Quod erat demonſt.

a *Per lem. præc.*

b *Per 6. l. 12.*

c *Per 1. hujus.*

Quod autem pyramides XN *d* deſinant in conum ſic oſtendo. Poliëdrorum ſuper-

d *Deſin 6. l. 12.*

ficies deſinunt in ſphæræ ſuperficiem ut poſtulatum ſupra. Atqui baſes X pyramidum XN, ſemper æquales ponuntur ſuperficiebus poliëdrorum, & Z baſis coni Z O per hyp. æqualis eſt ſuperficiei ſphæræ: ergo etiam baſes, X, deſinent in baſim Z; ac proinde cum pyramides XN ſint ad conum ex hyp. æquealtum, ut *e* baſis X ad baſim Z, etiam pyramides in conum deſinent.

e Per corol. p. 11. l. 12.

Demonſtratio jam allata hujus propoſitionis & ſequentis, penitus diverſa eſt ab eâ, quâ uſus eſt Archimedes; quæ quidem valdè ſubtilis & ingenioſa eſt, ſed prolixa & ardua; ad quam videlicet adhibentur duo manifeſta & propoſitiones undecim, præter alias non paucas, à quibus illæ dependent. Ipſum verò theorema ab Archimede proponitur hunc in modum: omnis ſphæra quadrupla eſt coni baſim habentis æqualem maximo circulo ſphæræ, altitudinem verò radium.

Scholium.

Ex hoc prænobili theoremate figuræ inter corporeas nobiliſſimæ elicitur dimenſio. Nam ſi diametri ſexta pars, ſive tertia ſemidiametri multiplicetur per ſphæræ ſuperficiem jam notam per ſcholium prop. 23. proveniet ſphæræ ſoliditas.

Inventa ſit ſphæræ terreſtris ſuperficies continere quadrata unius horæ milliaria 23,760,000, & ſemidiameter eſto milliarium horariorum 1375, cujus tertia pars eſt 458 $\frac{1}{3}$. Multiplica 458 omiſſâ fractione

fractione per 23, 760, 000 *provenient* 10,882, 080, 000 *cubica unius horæ milliaria pro ſoliditate orbis terræ.*

Cum enim ſphæra ſit æqualis a *cono, cujus altitudo eſt radius ſphæræ; baſis verò ſuperficies ſphæræ; coni autem ſoliditas* b *producatur ex parte tertiâ altitudinis, (hoc eſt radii ſphæræ) ductâ in baſim, hoc eſt in ſphæræ ſuperficiem; etiam ſphæræ ſoliditas obtinebitur ex tertia parte radii ductâ in ſuperficiem.*

a *Per hanc* 28.

b *Per ſchol. p.* 6. *hujus.*

PROPOSITIO XXIX.

Omnis ſector ſphæræ æqualis eſt cono, cujus altitudo eſt radius ſphæræ, baſis vero ſectoris ſphærica ſuperficies.

Esto primùm ſector (AECG) hemiſphærio minor. Intelligatur ſectori circumſcriptum eſſe poliëdrum corpus rectilineum. Si cætera ratiocinatio omnis ad eundem modum inſtituatur, ut in præcedenti, eodem modo concludetur quæſitum. Id ſolum oportebit oſtendere, ex quo diſcurſus totus dependet, ſuperficiem poliëdri ex planis ſphæricam ſuperficiem ECG undequaque tangentibus compoſitam, eſſe majorem ſuperficie E C G. Quod ita fiet. Cogitetur ſuperficiei ECG apponi alia *Fig.* 23.

æqua-

æqualis & ſimilis, planis tangentibus eodem prorſus modo cincta, quo prior. Erit jam tota *c* ſuperficies ex planis compoſita, major totâ ſphæricâ. Ergo etiam dimidia ex planis compoſita dimidiâ ſphæricâ E C G major erit.

c Per axio. hujus.

Eſto deinde ſector (A E B G) major hemiſphærio. Vterque ſector ſimul ſumtus æqualis *d* eſt cono cujus altitudo eſt radius ſphæræ, baſis autem tota ſuperficies; hoc eſt *e* duobus conis, quorum altitudo eadem, baſes vero pares ſupderficiei ſphæricæ ſegmentis E C G, E B G. Atqui ſectorum unus A E C G hemiſphærio minor, per 1 partem æquatur cono, cujus altitudo eſt radius, baſis vero ſuperficies E C G. Ergo alter A E B G æquatur cono reliquo, cuius altitudo eſt radius, baſis verò ſuperficies reliqua E B G. Quod erat demonſt.

d Per prac.
e Patet ex 11. l. 12.

Corollarium.

Cum ſuperficies E C G ſit æqualis *o* circulo radii CG, & ſuperficies EBG æqualis circulo radii BG, erunt ſectores A E CG, & A E B G æquales conis, quorum altitudo eſt radius ſphæræ, baſes vero circuli radiorum C G, & B G.

o Per 25. hujus.

Scho-

Scholium.

Ex his habetur dimenſio & ſectorum, & ſegmentorum ſphæræ; ſectorum quidem, ſi multiplicetur p tertia pars radij per ſphæricam ſectorum ſuperficiem, jam notam ex ſcholio prop. 27, ſive per circulum radij C G, vel B G: ſegmentorum verò, ſi menſuretur conus E A G, & à ſectore, ſi minor ſit hemiſphærio, auferatur; ſi major, eadem adjiciatur. *Fig. 23.* *p patet ex ſchol. p. 6. hujus.*

Segmentum (M Q R M) quod inter duos circulos ſive parallelos ſive non parallelos interjicitur menſurabis, ſi ſegmenta Q B R, M B N, jam nota auferantur ab invicem. *Fig. 18.*

PROPOSITIO XXX.

Hemiſphærium (E O B D) coni (E B D) eandem ſecum baſim & altitudinem habentis, duplum eſt. *Fig. 24.*

Conus cuius baſis eſt ſuperficies hemiſphærica E O B D, altitudo autem radius A B, eſt ad conum E B D, *a* ut baſis ad baſim, hoc eſt ut ſuperficies hemiſphærica E O B D ad maximum circulum P T. Ergo cum ſuperficies hemiſphærica E O B D dupla *b* ſit maximi circuli, etiam conus pro baſi habens ſuperficiem E O B D, pro altitudine radium A B, duplus eſt coni E B D. Atqui hemiſphærium æquatur *c* cono habenti *a Per 11. l. 12.* *b Per 24. hujus.* *c Per 28. hujus.*

benti pro altitudine radium, pro baſi ſuperficiem hemiſphæricam E O B D. Ergo etiam hemiſphærium coni E B D duplum eſt. Quod erat demonſt.

PROPOSITIO XXXI.

Fig. 25. *SPhæra ſit diviſa in duo ſegmenta I L B G, I S K G, plano I Q G T, centrum A non tranſeunte: diameter autem plano ſecanti recta ſit B O K.*

Ut altitudo O B ſegmenti I L B G eſt ad radium ſphæræ A B, ita O K altitudo ſegmenti alterius fiat ad aliam K N.

Pari modo ut O K altitudo ſegmenti I S K G eſt ad radium A K ſeu A B, ita altitudo O B ſegmenti alterius fiat ad aliam B D.

Dico 1. *Coni I N G & I D G quorum altitudines ſunt O N, O D, baſis vero communis I Q G T, ſegmentis ſphæricis ſunt æquales.*

2. *Segmentorum eadem eſt proportio, quæ rectarum D O, N O.*

3. *Segmentum I S K G eſt ad maximum ſibi inſcriptum conum I K G, ut N O ad K O, & ſegmentum I L B G eſt*

ad

ad ſibi inſcriptum conum maximum I B G, ut D O ad B O.

Pars 1. Sphæra & coni ſecentur plano per diametrum B K. Producentur in ſphærâ circulus maximus B L K G, in conis verò triangula B I G, I K G. Et quia B O K diameter *a* recta eſt circulo Q T erit angulus I O B *b* rectus. Angulus quoque B I K *c* in ſemicirculo rectus eſt. Quoniam igitur in triangulo B I K ab angulo recto ducta eſt I O perpendicularis in baſim B K, erit B I ad I O, ut *d* B K ad K I. Ergo ratio duplicata B I ad I O æqualis eſt rationi duplicatæ B K ad K I; hoc eſt (quia B K, K I, K O, *f* ſunt tres proportionales) æqualis rationis B K ad K O.

a *Per hyp.*
b *Per defin. 3. l. 11.*
c *Per 31. l. 3.*
d *Per 8. l. 6.*
f *Per coroll. 2. p. 8. l. 6.*

Deinde quia eſt ut O K ad radium A B, ita *o* O B ad B D; erit quoque invertendo D B ad B O, ut A B ad O K: & permut. D B ad B A, ut B O ad O K: & compon. D A ad B A, ut B K ad O K. Quoniam igitur jam oſtendi rationem B K ad O K duplicitam eſſe rationis B I ad I O, ac proinde æqualem *p* rationi circulorum radiis B I, I O deſcriptorum, erit quoque D A ad B A ut circulus radii B I ad circulum radii I O. Igitur conus ſub altitudine D A, & baſi circulo radii I O, hoc eſt circulo Q T, æqualis eſt *g* cono ſub altitudine B A, & baſi

o *Per hyp.*
p *Per 2. l 12.*
g *Per 15. l. 12.*

baſi circulo radii B I; hoc eſt ſectori ſphærico AIBG. Quare ſi tam *i* ſectori AIBG, quam cono ſub D A & circulo Q T, addatur idem conus I A G, tota erunt æqualia; videlicet ſegmentum Sphæricum I L B G æquabitur duobus conis, quorum unus eſt, qui fit ſub baſi Q T & altitudine D A, alter I A G, ſub eâdem baſi Q T, & altitudine O A. Sed hi duo coni *k* conficiunt conum I D G. Ergo ſegmentum I L B G cono I D G æquale erit. Quod erat demonſtrandum.

i *Per coroll. p. 29. hujus.*

k *Patet ex* 14. l. 12.

Eodem diſcurſu erit ſegmentum ISKG æquale cono I N G, eo ſolum mutato, ut conus I A G qui priùs addebatur, jam auferatur.

Pars 2. Patet ex primâ. Nam coni IDG & I N G ſunt inter ſe *n* ut D O, & N O, Ergo & ſegmenta I L B G, I S K G conis illis æqualia, ſunt inter ſe, ut rectæ D O, N O.

n *Per* 14. *l.* 12.

Pars 3. Patet ſimiliter ex primâ. Nam conus I D G eſt ad conum I B G, *q* ut DO ad B O. Ergo ſegmentum I L B G, cono I D G E æquale, eſt ad conum I B G, ut D O ad BO.

q *Per eand.*

Scholium.

Ex prima parte hujus theorematis, habetur alia, eaque facillima ſegmentorum ſphæricorum dimenſio; ſi nimirum coni I D G, I N G menſurentur; quod fiet ſi s tertiæ partes rectarum D O, N O ducantur in circulum Q T. s *Vide Schol. poſt 6. hujus.*

PROPOSITIO XXXII.

Cylindrus rectus (G K) ſphæra, cui circumſcribitur, & ſoliditate & ſuperficie totâ ſeſquialter eſt. *Fig. 24.*

Communis ſphæræ ac cylindri axis eſto B Q, conus vero maximus hemiſphærio E O B D inſcriptus ſit E B D. Quia cylindrus (E K ſemiſſis totius G K) triplus *a* eſt coni E B D; hemiſpharium vero *b* ejuſdem coni duplum, patet cylindrum E K eſſe ad hemiſphærium, ut 3 ad 2. Ergo etiam totus cylindrus G K eſt ad totam ſphæram Q E B D, ut 3 ad 2. Quod erat primum. a *Per 10. & 12.* b. *Per 30. hujus.*

Deinde quia cylindri latus K N eſt æquale baſis diametro G N, erit ejus ſuperficies abſque baſibus *c* quadrupla baſeos M I, ac proinde cnm baſibus, hoc eſt tota cylindri ſuperficies erit ſecupla baſeos M I, quæ par eſt maximo ſphæræ circulo. Atqui ſphæræ ſuperficies quadrupla eſt maximi circuli. c *Per corol. p. 12. hujus.*

Ergo

Ergo tota cylindri G K ſuperficies eſt ad ſphæræ ſuperficiem, ut 6 ad 4, ſive ut 3 ad 2. Quod erat alterum.

Igitur cylindrus ſphæræ ſibi inſcriptæ & ſoliditate & totâ ſuperficie ſeſquialter eſt. Quod erat demonſtrandum.

Scholium.

QUanti hoc theorema fecerit Archimedes argumento eſt, quod tumulo ſuo ſphæram cylindro inſcriptam apponi voluerit. Atque idcirco fortaſſe inter alia tam multa & præclara inventa ſua hoc illi præ reliquis placuit, quod & corporum & ſuperficierum corpora ipſa continentium eadem eſſet atque una rationalis proportio. Similem affectionum identitatem, annulos inter annulorumque ſuperficies demonſtravimus lib. 4. Cylindricorum & annularium prop; 13. 14. 15. ſed & ipsâ in ſphærâ aliud mihi hujus rei exemplum illuſtre ſeſe obtulit. Deprehendi ſiquidem, quemadmodum ſphæra ad cylindrum rectum, ſe ambientem (qui neceſſario æquilaterus erit) eſt tam ſoliditate quam ſuperficie, ut 2 ad 3; ita ſphæram ad æquilaterum conum ſe ambientem & ſoliditate ſimiliter & ſuperficie eam habere proportionem quam 4 ad 9. Ex quo deinde illud conſequitur, ſeſquialteram proportionem ab Archimede in cylindro & ſphæra repertam, in tribus ſolidis, ſphæra, cylindro, & cono æquilatero continuari. Utriuſque demonſtrationem, pluraque alia theoremata noſtra, quibus ſphæræ natura mirabilis

amplius

amplius innoteſcet, tredecim ſequentibus propoſitionibus comprehenſa, ſubjungam.

PROPOSITIO XXXIII.

Superficies ſphæræ dupla eſt ſuperficiei cylindri quadrati ſphæræ inſcripti. Fig. 26.

Quadratum maximo ſphæræ circulo inſcriptum, à quo in orbem ducto deſcribitur quadratus cylindrus, eſto A K L, ducaturque A L, diameter quadrato & ſphæræ communis. Quoniam quadratum AL par *a* eſt quadratis æqualibus AK, KL erit duplum unius A K. Ergo etiam circulus diametri AL, duplus *b* eſt circuli, cujus diameter A K, circuli nempè C N. Atqui ſuperficies ſphæræ quadrupla *c* eſt circuli, cujus diameter A L, is enim eſt maximus ſphæræ circulus; cum A L ſit ſphæræ diameter. Ergo ſphæræ ſuperficies octupla eſt circuli CN. Sed quia L K, K A, *d* æquales ſunt, cylindrica ſuperficies ACL quadrupla *e* eſt circuli CN. Ergo cum ſphæræ ſuperficies ejuſdem circuli octupla ſit, cylindricæ ſuperficiei dupla erit. Quod erat demonſt.

a *Per 47. l. 1.*
b *Patet ex 2. l. 12.*
c *Per 24. hujus.*
d *Per hyp.*
e *Per corol. p. 12. hujus.*

PROPOSITIO XXXIV.

Sphæræ ſuperficies ad totam cylindri quadrati ſibi inſcripti ſuperficiem eam proportionem habet, quam 4 ad 3. Fig. 26.

Ponantur eadem, quæ demonſt. præced. Quoniam cylindri latus L K & baſis diameter A K *f* æquales ſunt, erit ſuperficies cylindrica C L *g* quadrupla baſis C N, ac proinde tota cylindri ſuperficies ad utramque baſim C N & S L eſt ut 6. ad 2. Atqui ſphæræ ſuperficies eſt ad utramque ſimul baſim C N, S L ut 8. ad 2. cùm in præced. oſtenſa ſit eſſe ad unam baſim, ut 8. ad 1. Ergo ſphæræ ſuperficies eſt ad cylindricam C L ſuperficiem ut 8. ad 6. ſive ut 4. ad 3. Quod erat demonſt.

f Per hyp.
g Per coroll. p. 12. hujus.

Corollarium.

TOta cylindri recti ſphæræ circumſcripti ſuperficies, eſt ad totam ſuperficiem cylindri æquilateri inſcripti, ut 2. ad 1. Nam circumſcripta eſt ad ſphæricam ut 12. ad 8. per 32. hujus. Sphærica autem eſt ad inſcriptam, ut 8. ad 6. per hanc. Ergo ex æquo circumſcripta eſt ad inſcriptam, ut 12. ad 6. ſive ut 2. ad 1.

PROPOSITIO XXXV.

Fig. 26. vel 25.

CUjuſcunque portionis ſphæricæ ſuperficies (I L B G) ad ſuperficiem coni maximi inſcripti, eam rationem habet,

habet, quam coni latus (B G) ad baſis radium (G O.)

Quoniam portionis I L B G ſuperficies æqualis eſt circulo radii B G, erit proportio eius ad circulum Q T, baſim nempè ſuam & coni, duplicata *b* rationis B G ad G O; hoc eſt *c* rationis ſuperficiei conicæ I B G ad baſim eandem Q T. Ergo liquet *o* ſuperficiem I L B G eſſe ad ſuperficiem conicam I B G, ut eadem conica I B G eſt ad baſim Q T. Quare cum conica I B G ſit ab baſim Q T, *d* ut B G ad G O, etiam portionis ſuperficies erit ad conicam I B G ſibi inſcriptam ut B G ad G O. Quod erat demonſt.

a *Per* 25. *hujus.*
b *Per* 2. *l.* 12
c *Per* 14. *hujus.*
o *Per defin.* 10. *l.* 5.
d *Per* 14. *hujus.*

PROPOSITIO XXXVI.

Fig. 241.

H*Emiſphærii ſuperficies (E O B D) ad coni maximi ſive recti inſcripti ſuperficiem (E B D) eam rationem habet, quam in quadrato diameter ad latus: ad ſuperficiem vero coni ſimilis circumſcripti, ut latus in quadrato ad diametrum.*

1. Partis demonſtratio ex præcedenti eſt manifeſta; eſt enim portionis cuiuſcunque, ac proinde & hemiſphærii ſuperficies E O B D ad conicam inſcriptam, ut B D ad

D A. Eſt autem, B A D K quadratum, cuius diameter eſt B D, latus D A.

Fig. 6. lib. 4. tab. 3. 2. Pars. Semiſſis quadrati circulo (cuius centrum A) circumſcripti, eſto E B C, quâ circa axem AB circumactâ gignatur conus hemiſphærio conſcriptus. Quoniam quadratum E C duplum *a* eſt quadrati E B, ſeu G I, etiam circulus diametri E C duplus *b* eſt circuli cujus diameter G I, hoc eſt circuli H G D I. Atqui *c* ſuperficies hemiſphærij cono E B C incluſi eiusdem circuli dupla eſt. Ergo circulus diametri E C ſuperficiei hemiſphæricæ æqualis eſt. Quare cum ſuperficies conica E B C ſit ad *d* circulum diametri E C, baſim nempè ſuam, ut latus B E ad baſis radium E A, erit quoque ad ſuperficiem hemiſphæricam ſibi inſcriptam ut B E ad E A, hoc eſt ut diameter in quadrato E B C F, ad ſuum latus. Quod erat demonſt.

a *Patet ex 47. l. 1.*
b *Per 2. l. 12*
c *Per 24. hujus.*
d *Per 14. hujus.*

PROPOSITIO XXXVII.

Fig. eadem cum. Fig. 13. l. 5. tab. 3.

Sphæra ad quadratum rhombum conicum ſibi circumſcriptum, & ſoliditate & ſuperficie eam proportionem habet quam in quadrato latus ad diametrum.

Maximo ſphæræ circulo H G D I circumſcriptum eſto quadratum E B C F, à quo circa axem B F in orbem acto, rhombus

bus conicus gignatur ſphæram ambiens. Ut EB quadrati latus (inſpice Fig.6.l.4.) ad diametrum E C, ita fiat S ad R (inſpice Fig.13.l.5.) quæ proportio per 4. terminos S,R,Q,O, continetur. Erit igitur ratio S ad O triplicata *a* rationis S ad R, hoc eſt, E B ad E C; & ratio O ad R erit duplicata rationis O ad Q ſive R ad S, hoc eſt E C ad E B, ac proinde *b* O eſt ad R, ut quadratum E C ad quadratum E B; unde O eſt dupla ipſius R. His ita conſtitutis, intelligatur rhombo conico ſphæra circumſcribi EBCF. Erit igitur ſphæra H G D I ad ſphæram EBCF in *o* ratione triplicata diametri G I, (ſive E B) ad diametrum EC; hoc eſt (quod jam oſtendi) erit ut S ad O. Sphæra autem E B C F eſt ad rhombum conicum ſibi inſcriptum *c* ut 2. ad 1; hoc eſt (quod oſtendi ſupra) ut O ad R. Igitur ex æquo ſphæra H G D I eſt ad eundem rhombum. qui ei eſt circumſcriptus ut S eſt ad R, hoc eſt ut in quadrato latus E B ad diametrum E C. Quod erat primum. Deinde ex ſecundâ parte præcedentis patet hemiſphæræ ſuperficiem eſſe ad ſuperficiem coni E B C, ac proinde & totius ſphæræ ſuperficiem eſſe ad ſuperficiem totius rhombi E B C F, ut latus in quadrato ad diametrum. Ergo ſphæra tam ſoliditate quam ſuperficie eſt ad rhombum quadratum E B C F; ut in qua-

a Per defin. 10. l. 5.

b Per 20. l. 6.

o Per 18. l. 12.

c Per 30. hujus.

drato latus ad diametrum. Quod erat demonſtr.

PROPOSITIO XXXVIII.

Fig. 27.

Superficies portionis (B G K D) conum æquilaterum (B K D) capientis dupla eſt ſuperficiei ejuſdem coni.

Patet ſimiliter ex 35. Nam ſuperficies portionis B G K D eſt ad inſcriptam conicam, ut *a* B K ad B A. Sed quia conus B K D æquilaterus ponitur, K B eſt æqualis B D, adeoque dupla B A. Ergo etiam ſuperficies B G K D dupla eſt inſcriptæ conicæ B K D. Quod erat demonſt.

a Per 35. hujus.

PROPOSITIO XXXIX.

Fig. 27.

Sphæræ ſuperficies ad totam coni æquilateri ſibi inſcripti ſuperficiem eam proportionem habet, quam 16. ad 9.

Eſto, Z, ſphæræ centrum & conus æquilaterus ſphæræ inſcriptus B K D, axis ſphæræ ac cono communis K Z A O. Per hunc ſi ſecetur ſphæra ac conus, producetur in ſphæra circulus maximus OBKD, in cono autem triangulum æquilaterum BKD, cujus unum latus B A D erit diameter baſeos conicæ QT. Et quia axis coni K A rectus

eſt

eſt baſi Q T, erit angulus B A K *d* rectus. *d Per defin. 3. l. 11.*
Igitur quadratum B A æquale eſt *e* rectangulo K A O. Jam quia latus æquilateri trianguli abſcindit *f* quartam axis partem A O, erit rectangulum K A O, hoc eſt quadratum B A, triplum quadrati *i* A O. Quare cum quadratum radii Z O *k* quadruplum ſit quadrati A O, erit quadratum radii Z O ad quadratum radii B A, ut 4. ad 3. Ergo etiam *m* circulus O B K D eſt ad circulum Q T ut 4. ad 3: Ergo ſunt quatuor circuli O B K D, hoc eſt *n* tota ſphæræ D G ſuperficies, ad circulum Q T, ut 16 ad 3: Atqui *o* ſuperficies coni æqui lateri B K D eſt ad circulum Q T baſim nempè ſuam, ut 2. ad 1. ac proinde coni B K D tota ſuperficies, unâ cum baſi ſcilicet, eſt ad baſim, nempè circulum Q T, ut 3. ad 1. ſive ut 9. ad 3. Ergo cum oſtenderim ſphæræ ſuperficiem eſſe ad eundem circulum ut 16. ad 3. erit ſphæræ D G ſuperficies ad totam æquilateri coni ſuperficiem, ut 16. ad 9. Quod erat demonſt.

e) Per corol. p. 17. l. 6.

f Per corol. 5. p. 15. l. 4.

i Per 1. l. 6.

k Per 4. l. 2. vel 20. l. 6.

m Per 2. l. 12.

n Per 24. hujus.

o Per coroll. 1. p. 14 hujus.

Aliter.

QUoniam æquilateri trianguli latus B D, abſcindit *p* quartam axis partem A O, erit quoque ſphærica ſuperficies B O D *q* quarta pars, ac proinde ſuperficies B G K D, tres quartæ ſuperficiei totius

p Per coroll. 5. p. 15. l. 4.

q Per 27. hujus.

ſphæræ. Quare ſi ſuperficies tota ſtatuatur eſſe 16, BGKD ſuperficies erit 12. Atqui ſuperficies BGKD r eſt dupla ſuperficiei conicæ BKD, ac proinde ad eam eſt ut 12 ad 6. Ergo tota ſphæræ ſuperficies eſt ad conicam BKD ut 16 ad 6. Deinde quia ſuperficies coni BKD, (utpote æquilateri) dupla s eſt baſeos QT, liquet ſuperficiem conicam BKD (nimirum abſque baſi) eſſe ad totam coni ſuperficiem, ut 2 ad 3; hoc eſt ut 6 ad 9. Igitur ex æquo tota ſphæræ ſuperficies eſt ad totam æquilateri coni inſcripti ſuperficiem, ut 16 ad 9. Quod erat demonſtr.

r Per præc.

s Per corol. 1. p. 14. huius.

PROPOSITIO XL.

Fig. 28.

Sphæræ ſuperficies ad æquilateri coni ſibi circumſcripti totam ſuperficiem, eam proportionem habet, quam 4 ad 9.

Circulo ſphæræ maximo BPM circumſcriptum ſit triangulum æquilaterū DOF, à quo circa axem OAB in orbem ducto, productus ſit conus æquilaterus ſphæræ circumſcriptus. Æquilatero autem triangulo DOF circumſcriptus etiam ſit circulus, NDLOF, quem patet eſſe concentricum priori; & axis OAB perducatur in N. Quoniam BN eſt a quarta pars axis ON, patet ON eſſe duplam KB. Quare cum circu-

a Per corol. 1. p. 15. 14.

circulorum ratio ſit *b* duplicata rationis diametrorum, erit circulus BPM, ad circulum N D L O F ut 1 ad 4. Atqui oſtenſum jam eſt in demonſtratione prima præcedenti, circulum N D L O F eſſe ad circulum QT, baſim coni æquilateri ſphæræ F L inſcripti, ut 4 ad 3. Ex *c* æquo igitur circulus B P M eſt ad circulum QT ut 1 ad 3. Atqui tota coni D O F ſuperficies circuli QT *d* tripla eſt. Ergo tota coni ſuperficies circuli B P M noncupla eſt. Quare cum ſphæræ T P ſuperficies ejuſdem circuli B P M *e* quadrupla ſit, erit tota coni æquilateri D O F ſuperficies ad ſuperficiem ſphæræ, cui circumſcripta eſt, ut 9 ad 4. Quod erat demonſtr.

b Per 2. l. 12.
c Per 22. l. 5.
d Per corol. 1. p. 14. hujus.
e Per 24. hujus.

PROPOSITIO XLI.

Æquilateri coni ſphæræ circumſcripti tota ſuperficies quadrupla eſt ſuperficiei totius coni inſcripti eidem ſphæræ. *Fig. 28.*

Æquilateri coni DOF circumſcripti tota ſuperficies eſt ad ſphæræ ſuperficiem ut *a* 9 ad 4: & ſphæræ ſuperficies eſt ad coni inſcripti æquilateri S K T ſuperficiem ut *b* 16 ad 9. Ergo ex *c* æqualitate perturbatâ circumſcripti æquilateri coni tota ſuperficies

a Per præc.
b Per 39. hujus.
c Per 23. l. 5.

cies

cies eſt ad totam ſuperficiem æquilateri inſcripti, ut 16 ad 4. ſiue ut 4. ad 1. Quod erat demonſt.

PROPOSITIO XLII.

Fig. 29.

Sphæra ad inſcriptum ſibi conum æquilaterum (BKC) eam rationem habet quam 32. ad 9.

Sphæra & conus BKC ſecentur plano per axem communem K O, faciente in ſphærâ circulum maximum OFKI, in cono autem triangulum æquilaterum BKC. Ducto deinde plano per centrum A, ad OK recto, abſcindatur hemiſphærium F G K I, cui inſcriptus intelligatur conus maximus FKI. Quoniam trianguli æquilateri latus BC abſcindit OP *d* quartam partem axis OK, erit PK ad A K ut 3. ad 2. hoc eſt ut 9. ad 6. Baſis verò Q T eſt ad circulum O F K I, hoc eſt ad baſim N D, ut 3. ad 4. hoc eſt ut 6. ad 8. uti patet ex demonſtratis prop 39. Quare cum ratio coni B K C ad conum F K I componatur *e* ex ratione altitudinis P K ad altitudinem AK (hoc eſt ex ratione 9. ad 6) & ex ratione baſis QT ad baſim N D (hoc eſt ex ratione 6. ad 8.) erit conus B K C ad conum F K I ut 9. ad 8. Quare cum ſphæra C G quadrupla *f* ſit coni F K I, erit conus æquilaterus BKG ad ſphæram

d Per corol. 3. p. 15. l. 4.

e Per ſchol. p. 15. l. 12.

f Per 30. hujus.

ſphæram C G, ut 9. ad 32. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XLIII.

Conus æquilaterus ſphæræ circumſcriptus coni æquilateri eidem ſphæræ inſcripti octuplus eſt.

Coni æquilateri ſphæræ inſcripti, & circumſcripti ſint SKT & DOF& axis communis eſto OK B, Secentur deinde plano per axem tam conus uterque quam ſphæra; eruntque ſectiones triangula duo æquilatera, & circulus BPM maximus. Circa triangulum quoque D O F intelligatur deſcriptus eſſe circulus N D O F, & axis O K B producatur in N. Quoniam verò æquilateri trianguli latus DF abſcindit axis O N quartam *a* partem NB, patet N O, eſſe duplam BK. Similiter quia æquilateri alterius trianguli latus S T abſcindit axeos BK *b* quartam partem B C. erit N O ad B O, ut BK ad CK: & permutando ut N O ad B K ſic B O ad CK. ſed N O dupla eſt BK. Ergo etiam B O dupla eſt CK; Igitur ob ſimilitudinem triangulorum D O F, SK T etiam *c* D F& S T diametri videlicet baſium conicarum, ſunt inter ſe in proportione dupla. Quare cum coni D O F, SK T, ſint ſimiles,

Fig. 28.

a *Per corol. 5. p. 15. l. 4.*

b *Per idem corol.*

c *Per 4. l. 6.*

d Per 12. l. 12. miles, ac proinde eorum proportio *d* triplicata ſit proportionis diametrorum D F & S T, quæ eſt 2 ad 1; erit conus D O F ad conum S K T, ut 8 ad 1. Quod erat dem.

PROPOSITIO XLIV.

Fig. 28. *Sphæra ad circumſcriptum ſibi conum æquilaterum (D O F) & ſoliditate & ſuperficie, eam proportionem habet, quam 4 ad 9.*

d Per 42. hujus. Sphæra T P eſt ad inſcriptum *d* ſibi conum æquilaterum S K T, ut 32 ad 9. Inſcriptus autem S K T conus æquilaterus eſt ad conum æquilaterum circumſcriptum f Per præc. D O F ut *f* 1 ad 8, hoc eſt ut 9 ad 72. Igitur ex æquo ſphæra T P eſt ad ad conum æquilaterum circumſcriptum D O F, ut 32 ad 72; hoc eſt ut 4 ad 9. Propoſitione autem 40. demonſtrauimus etiam ſphæræ ſuperficiem eſſe ad totam æquilateri coni circumſcripti ſuperficiem ut 4 ad 9. Ergo ſphæra & ſoliditate & ſuperficie eſt ad æquilaterum conum ſibi circumſcriptum ut 4 ad 9. Quod erat demonſt.

Quod igitur in ſphæra & cylindro ſphæram ambiente miratus eſt Archimedes, idipſum in ſphæra & æquilatero cono ambiente ſphæram, jam demonſtravimus, ut videlicet & ſoliditatum inter ſe eadem

eadem proportio rationalis, quæ ſuperficierum, exiſtat. Quemadmodum enim ille reperit ſphæram ad cylindrum eſſe tam ſoliditate quam ſuperficie, ut 2 ad 3; ita nos docuimus ſphæram & ſoliditate & ſuperficie eſſe ad conum æquilaterum ſe ambientem, ut 4 ad 9.

Hinc verò illam ipſam proportionem, nempè ſeſquialteram, quam exiſtere ſphæram inter ac cylindrum Archimedes tradidit, ab æquilatero cono circumſcripto & ſoliditate etiam ac ſuperficie continuari nullo negotio jam demonſtrabimus, atque ita huic pariter opuſculo finem imponemus.

PROPOSITIO XLV.

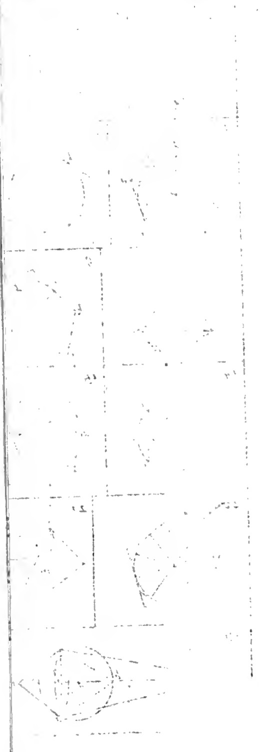
Conus æquilaterus ſphæræ circumſcriptus, et cylindrus rectus ſphæræ ſimiliter circumſcriptus, & ipſa ſphæra, eandem proportionem continuant, nimirum ſeſquialteram, tam quoad ſoliditatem, quàm quoad ſuperficiem totam. *Vide Fig. quæ huic tractatui præfixa eſt.*

Nam per 32 hujus cylindrus rectus GK. ſphæram ambiens tam ſoliditate quam totâ ſuperficie eſt ad ſphæram ut 3 ad 2, ſive ut 6 ad 4. Per præcedentem verò circumſcriptus ſphæræ conus æquilaterus B A D, tam ſoliditate, quàm ſuperficie eſt ad ſphæram ut 9 ad 4. Ergo idem conus eſt ad cylindrum tam ſoliditate quam ſuperficie, ut 9 ad

ad 6. Quare hæc tria corpora conus, cylindrus, ſphæra ſunt inter ſe ut hi numeri 9. 6. 4. ac proinde continuant proportionem ſeſquialteram. Quod erat demonſtrandum.

FINIS.

Ad majorem Dei Gloriam.



Digitized by Google

APPENDIX

Qua demonſtratur ex falſo poſſe directè deduci verum.

IN theſibus Mathematicis, quas Lovanii ſeſqui abhinc anno Illuſtriſſ. D. Theodorus D'Imerſelle, Comes de Bouchove & S. Imperii magnâ ingenii commendatione & auditorum plauſu publicè propugnavit, inter cæteras propoſui aſſertionem hujuſmodi: *ex falſis poſſe verum directe elici novis exemplis Geometricis confirmamus*. Hanc aſſertionem ſibi oppugnandam ſuſcepit vir Clariſſimus Daniel Lipſtorpius in appendice, quam operi ſuo pererudito, quod Specimina Philoſophiæ Carteſianæ inſcripſit, hac de cauſâ adjunxit. Id verò eâ modeſtiâ & humanitate præſtitit, ut facilè appareat, hoc illi unum fuiſſe propoſitum, ut veritatem aſſequeretur. Ne autem videar doctiſſimi viri judicium parvi facere, hic illi breviter reſpondebo, & appendici appendicem reponam.

Concluſionem igitur oppugnatam ſic demonſtro.

Datur aſſertio quæ directè ex ſua contradictoria

tradictoria inferatur. Talis in prop.12.l.9. Eucl.eſt hæc: *numerus E metitur numerū A*; quæ demonſtratione affirmativa infertur ex ſuâ contradictoriâ: *E non metitur numerum A*: Quod quidem eſt æquè certum, ac demonſtrationē illam eſſe legitimam? Talis in Elementis hiſce noſtris prop.4.l.11.eſt hæc: b *Recta BQ non eſt perpendicularis plano CAF*, quæ affirmativè deducitur ex ſua cōtradictoriâ: c *recta B Q eſt perpendicularis plano CAF*. Talis in propoſitione noſtra 35.l.5.eſt hæc: *A eſt ad B, ut E ad Z*, quæ directè infertur ex ſua contradictoriâ: *A non eſt ad B, ut E ad Z*. Tales denique reperiūtur apud Cardanum l.5.per proport.p.201.apud Theodoſium (commentante Clavio) l. 1. ſph. p. 12. & nos plures ſimiles poſſumus exhibere tum Geometricas tum alias.

b *Fig.* 12. *l.* 11 *tab.* 5. c *Fig.* 20. *l.* 5. *tab.* 3.

Ecce tibi coſmographicam unam quam in iiſdem theſibus diſputandā propoſui. *Maris, omniſque adeo humidi ſuperficies eo ipſo cōcluditur eſſe ſphærica, quo id negas*. Ponatur vera eſſe ejus contradictoria; *Maris ſuperficies ſphærica non eſt*. Quoniā igitur maris ſuperficies ſphærica non eſt; ergo ōnes ſuperficiei maritimæ partes nō diſtant æqualiter à centro. Ergo una eſt altior altera, (altiorem enim eſſe non aliud eſt, quam longiùs à centro recedere.) Ergo eæ quæ altiores ſunt, defluunt verſus minùs altas ſeu decliviores,

viores, hanc enim eſſe humidi naturam experientiâ conſtat. Ex tali autem defluxu neceſſariò oritur omnium partium ſuperficiei maritimæ æqualis altitudo, ſeu diſtantia à centro. Æqualis verò omnium partium ſuperficiei maritimæ à centro diſtantia infert ſphæricitatem ejus perfectam. *Ergo maris ſuperficies ſphærica eſt.*

Habemus igitur hanc: *Maris ſuperficies ſphærica eſt*, directè & affirmativè ductam ex ſuâ contradictoriâ, *maris ſuperficies ſphærica non eſt.*

Maneat igitur extra omnem controverſiam eſſe, dari aſſertiones, quæ dirictè ex ſuis contradictoriis inferantur. Atqui aſſertio, quæ ex ſua contradictoria directè infertur, neceſſariò vera eſt, (cum ſit axioma per ſe clariſſimum, id neceſſariò verum eſſe quodſuum contradictorium deſtruit; deſtruit autem ſuum contradictorium, quod ex ſuo contradictorio directè ſequitur.) Ergo & aſſertionis contradictoria, ex qua videlicet deducta eſt aſſertio, falſa eſt. Ergo ex falſo directè & affirmativè deductum eſt verum. Demonſtrata igitur eſt concluſio in theſibus propoſita.

Quòd vero ejuſmodi demonſtratio, quâ aſſertio ex ſuâ contradictoriâ falsâ directè infertur verè ſcientiam pariat, ſic ut abſque ulteriori vllâ deductione ad impoſſibile, de aſſertionis veritate ſecuri

 eſſe

eſſe debeamus, ex jam dictis manifeſtum eſt, cum lumine naturæ notiſſimum ſit, id neceſſariò verum eſſe, quod ſuum contradictorium deſtruit, hoc eſt quod ex ſuo contradictorio ſequelâ legitimâ & neceſſariâ infertur. Quod ſi verum deducatur ex falſo quopiam ſibi non contradictorio, nequaquam talis ratiocinatio ſcientiam pariet, neque enim de veritate aſſertionis ſic deductæ ſecuri eſſe poſſumus, cum in ea ratio jam allata deficiat, & proprium falſo ſciamus eſſe, ut ex eo falſa deducantur.

His ritè perceptis facilè eruditus Lector perſpiciet, nihil opus eſſe, ut ſingulis Clariſſimi Viri objectionibus & argumentis refellendis immoremur, quæ vel contra me nihil faciant; vel ex jam dictis ſoluta intelligantur. Quia tamen non omnibus ad manum erit opus clariſſimi Viri, viſum eſt ſingula breviter attingere.

Primùm ſupponit ex Dialectica quædam de conſequentiâ directâ; & dicto (ut vocant) de omni & de nullo. Tum ſententiam exponit ſuam noſtræ oppoſitam. Subjungit deinde: *hanc ſententiam meam ſtabilio everſione omnium illorum, quæ in contrarium afferri poſſe videntur.*

Primum (inquit) *quod ex falſis verum concludere videatur conſtituit hujuſmodi ſyllogiſmus; omnis leo eſt lapis. Omnis adamas*

mas eſt leo. Ergo omnis adamas eſt lapis. In quo &c. Tali ſyllogiſmo ad probandam aſſertionem meam ego non utor, in quo videlicet verum deducitur ex falſo non contradictorio, qui proinde etiam, ut oſtendi ſupra, ſcientiam non parit. Primum iſtud igitur me non tangit.

Secundum genus objectionum (inquit) *conſtituunt hypotheſes Aſtronomicæ &c. Quæ licet fictitiæ tantùm ſint & falſæ, tamen juxta eas calculum eclipſibus, & aliis obſervationibus cæleſtibus convenientem Aſtronomi exhibent.* Deinde poſtquam multis contendit, hinc non probari verum ex falſo directè elici, *Progredior* (inquit) *ad tertiam inſtantiam, quam ex regula falſi depromere licet* &c. contenditque rurſum hic non elici ex falſo verum. Quo quidem in utroque, cum illi ego planè aſſentiar, neque ullum inde pro aſſertione meâ argumentum petam, non me magis illa tangunt, quam primum.

Ultimas denique objectiones (inquit) *nobis faceſſunt, modi demonſtrandi ab Euclide 9. elem. p.12. Cardano l. 5. de proport. p. 201, & Theodoſio l. 1. ſph. p. 12. adhibiti*, quò me digitum intendiſſe putat, & verè. Ex his ſiquidem demonſtrandi modis, evidenter jam demonſtravi ſupra, ex falſo elici directè verum; neque affertur quidquam à Clariſſimo Viro, quod demonſtrationem noſtram infirmet. Veris

Clavii

Clavii ad. p. 12. lib. 9. recitatis, ſubjungit ex eodem Clavio demonſtrationem p. 12. l. 1. ſph. Theodoſii: Tum (inquit) *ut verum fatear, neſcio ſanè, quid Clavio in mentem venerit, uti & Cardano, quare inſolitum hunc & mirabilem argumentandi modum eſſe putaverint, qui tamen Logicis valdè familiaris eſt & duobus principiis omnium evidentiſſimis & naturâ notiſſimis nititur, hiſce nempè: quod idem non poſſit ſimul eſſe & non eſſe, item quodlibet aut ſit aut non ſit.* Quid Clavio, Cardano, & cùm iſtis aliiſque etiam mihi in hac argumentandi forma ſit viſum mirabile, dicere in promptu eſt; hoc nimirum quod aſſertio probanda (G eſt centrum ſphæræ,) directè ex ſuâ contradictoriâ, (G non eſt centrum ſphæræ) conſequentiis legitimis ac neceſſariis deducatur. Quod quidem quotieſcunque evenit, admiratione dignum eſt. Tantùm verò abeſt, ut hæc ratio demonſtrandi Logicis valdè familiaris ſit, ut etiam non defuerint doctiſſimi viri, quibus ea impoſſibilis videretur. Ut deinde oſtendat vir Clariſſ. hoc diſcurſu verum ex falſo non deduci, repetit demonſtrationem propoſitionis Theodoſianæ, ſed formâ planè diversâ à Clavianâ illâ, quam priùs recitaverat, in quâ vis argumentationis inter nos controverſæ clariſſimè cernitur, Subjungit denique: *neque ego tam*

lyn-

lynceus ſum ut exinde videre queam, quo pacto ex falſo verum directe ſequatur. Illud tamen video, quod ſi G demonſtretur non eſſe centrum ſphæræ, (vult, credo dicere, *ponatur*, cum demonſtrari nequeat, quod falſum eſt) *neceſſariò ſit admittenda contradictoria ejus affirmativa, quod G ſit centrum ſphæræ.* Ad hæc verba repetam compendio demonſtrationem ſuperiùs datam, quâ, opinor, fiet, ut V. C. tàmetſi, quod eſt maximè, lynceus non eſſet, clarè perſpiciat elici directè ex falſo verum.

Quoniam admittit (id quod etiam eo non dante evinceret Claviana demonſtratio) ſi G ponatur non eſſe centrum, ſequi neceſſitate abſolutâ & formali G eſſe centrum; manifeſtum eſt, G eſſe centrum, directè ſequi ex ſuâ contradictoriâ, G non eſt centrum. Ergo ex vi deductionis conſtat verum eſſe quod G ſit centrum, cum lumine naturali notum ſit id eſſe neceſſariò verum, quod ſuum contradictorium deſtruit, hoc eſt quod ex ſuo contradictorio directè ſequitur. Habemus igitur quod ex hac: (G non eſt centrum) directè deducta ſit hæc vera; (G eſt centrum.) Atqui hæc (G non eſt centrum) falſa eſt, cum jam oſtenderim veram eſſe hanc (G eſt centrum.) Ergo verum directè deductum eſt ex falſo.

Hæc ſunt, Erudite Lector, quæ ſuper

hac quæſtione breviter hic putavi apponenda. Cæterùm nihil dubito quin Clariſſimus Lipſtorpius eâdem animi æquitate reſponſionem hanc noſtram ſit accepturus, quâ dedit oppugnationem ſuam, & ego illam accepi.

FINIS.

AD

AD COMPACTOREM.

Sex tabulæ figurarum aſſigentur hoc ordine:

Tabula 1. *ante pag.* 55.

Tab. 2. *ante pag.* 109.

Tab. 3. *ante pag.* 181.

Tab. 4. *ante pag.* 221

Tab. 5. *ante pag.* 269.

Tab. 6. *ante pag.* 351

Aſſigentur autem ſic, ut cum explicatæ fuerint, manente intra librum folio albo, figuræ totæ extra librum in conſpectum veniant, complicatæ autem intra libri margines præcisè recipiantur. Expediet verò ita complicari, ut figuræ, etiam dum complicatæ fuerint, aſpectui patiant.

AU RELIEUR.

Les ſix planches de figures ſeront inſerées à l'ordre qui ſuit.

La 1. *planche devant la page* 55.

2. *planche devant p.* 109.

3. *planche devant p.* 181.

4. *planche devant p.* 221.

5. *planche devant p.* 269.

6. *planche devant p.* 351.

Or il faut attacher en ſorte, que la planche eſtant ouverte, toute la figure paſſe preciſement la tranche du livre; & qu'ainſi elle paroiſſe entierement, bien qu'on referme le livre: il faut pourtant qu'eſtant pliée elle ſ'aiu-

s'aiuſte avec le reſte de feuilles. Il ſera auſſi à propos, de les plier en ſorte, que les figures ſe voyent, & que le dos en ſoit caché.

AEN DE BINDER

De ſes plaeten ſalmen op haer plaetſe binden als volght.

De 1. *plaet voor pag.* 53.
2. *plaet voor pag.* 109.
3. *plaet voor pag.* 181.
4. *plaet voor pag.* 221.
5. *plaet voor pag.* 269.
6. *plaet voor pag.* 351.

Men ſal de platen alſoo binden, dat het blat opengheuouwen ſijnde, de witte ſijde blijve binnen het boeck, ende d'andere met de figuren geheel daer buyten. Is oock geraeden het blat alſoo toe te vouwen, dat de figuren oock toeghevouwen ſijnde, 'konnen gheſien worden.

AC1 1462132

Digitized by Google

Digitized by Google

K.12.

X.XXI.
3.11

Digitized by Google